

**Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей ИГУ г. Иркутска (МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска)**

**МАОУ
ЛИЦЕЙ ИГУ
Г. ИРКУТСКА**

Подписано цифровой подписью: МАОУ ЛИЦЕЙ ИГУ Г.
ИРКУТСКА.
DN:
1.2.840.1135491.1.2.2-181.2088302-381.201001-3812531482
45, email=lgp_irk@mail.ru,
1.2.643.3.131.1.1-1-20030303338831323038833330302,
1.2.643.100.1-1-200303033388313230388333303030303,
1.2.643.100.1-1-200303033388313230388333303030303,
1000-директор, o=МАОУ ЛИЦЕЙ ИГУ Г. ИРКУТСКА,
street=УЛ АКАДЕМИКА КУРЧАТОВА, ДОМ 13А, И-Иркутск,
st=38 Иркутская область, sn=RU, givenName=Елена
Кузьмина, ou=МАОУ ЛИЦЕЙ ИГУ Г.
ИРКУТСКА
Дата: 2023.07.16 14:20:26 +0800

Утверждено
приказом директора
МАОУ Лицея ИГУ г. Иркутска
№ 01-06-60/1 от 30.04.2020 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА» («Алгебра и начала матема-
тического анализа», «Геометрия»)
10 - 11 классы**

Срок реализации программы 2 года

Составители программы: Коваленок И.Л., учитель математики МАОУ Лицей
ИГУ г.Иркутска
Кузьмина Е.Ю., кандидат физико-математических
наук, доцент, учитель математики МАОУ Лицей
ИГУ г.Иркутска
Осипенко Л.А., кандидат физико-математических
наук, доцент, учитель математики МАОУ Лицей
ИГУ г.Иркутска

**г. Иркутск
2020 год**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа по математике разработана на основе требований к планируемым результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования, реализующей ФГОС СО, с учетом особенностей организации образовательного процесса Лицея ИГУ.

В программу включены содержание, тематическое планирование, требования к математической подготовке учащихся к концу десятого и одиннадцатого классов, а также оценочные материалы (приложение 1) и методические материалы (приложение 2).

- раздел программы «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» изучаются учащимися 10-11 классов Лицея в курсе «Дискретная математика».

- содержание предмета «Геометрия» в 10-11 классах реализуется на профильном уровне за счет выбора уровня сложности задач и интенсивного прохождения материала, в том числе, на предыдущем этапе обучения.

Программа включает 2 блока: «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия»

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

Блок 1. «Алгебра и начала мате- матического анализа»	10 класс		11 класс		Всего	
	С углубленным изучением математики Математический Физико-математический Экономико-математический Информационно-математический Лингво-математический	Естественно-математический	С углубленным изучением математики Математический Физико-математический Экономико-математический Информационно-математический Лингво-математический	Естественно-математический	С углубленным изучением математики Математический Физико-математический Экономико-математический Информационно-математический Лингво-математический	Естественно-математический
Количество учебных недель	35	35	34	34		
Количество часов в неделю	5 ч/нед	4 ч/нед	5 ч/нед	4 ч/нед		
Количество часов в год	175	140	170	136	345	276

Блок 2 «Геометрия»	10 класс		11 класс		Всего	
	С углубленным изучением математики Математический Физико-математический Экономико-математический Информационно-математический Лингво-математический	Естественно-математический	С углубленным изучением математики Математический Физико-математический Экономико-математический Информационно-математический Лингво-математический	Естественно-математический	С углубленным изучением математики Математический Физико-математический Экономико-математический Информационно-математический Лингво-математический	Естественно-математический
Количество учебных недель	35	35	34	34		
Количество часов в неделю	2 ч/нед	2 ч/нед	2 ч/нед	2 ч/нед		
Количество часов в год	70	70	68	68	138	138

Уровень подготовки учащихся - углубленный.

Место предмета в учебном плане: обязательная часть

Учебники:

Алгебра:

для математического, физико-экономического, информационно-математического и экономико-математического классов:

- Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый и углубленный уровни – М.: Просвещение, 2018

- Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и углубленный уровни. – М.: Просвещение, 2018

для лингво-математического и естественно-математического классов

- Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень), 10-11 классы. – М.: Просвещение. 2018

Геометрия:

Атанасян Л.С., Бутусов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия: 10-11 классы: Учебник для общеобразовательных учреждений: Базовый и профильный уровни – М: Просвещение, 2018.

Дополнительная литература:

1. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа.11. Профильный уровень. – М.: БИНОМ, 2012.

2. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа.11. Профильный уровень. – М.: БИНОМ, 2012

3. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа.10-11. Профильный уровень. Задачник. – М.: БИНОМ, 2013

4. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра и начала анализа, учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений, - М.: Просвещение, 2012, 2013

5. Никольский СМ. и др. Алгебра и начала анализа, 10. - М.: Просвещение, 2011.

6. Никольский СМ. и др. Алгебра и начала анализа, 11. - М.: Просвещение, 2011.

7. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа для школ и

- классов с углубленным изучением математики. 10-11 кл. - М.: Просвещение, 2003.
8. Зив Б.Г. Задачи по геометрии для 7-11 классов. –М.: Просвещение, 2003 – 2008.
 9. Осипенко Л.А. Комбинации сферы и многогранников. Задачи и упражнения. Методическое пособие. /Серия Университетский лицей. Вып 5. – Иркутск: ЛИГУ, 2009.
 10. Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. - М.: Дрофа, 1999.

Литература для учителя:

1. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Швацбург С.И., Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Методические рекомендации и дидактические материалы. - М.: Просвещение, 1986.
2. Рыжик В.И. Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу: 10-11 кл. с угл. изуч. математики. - М.: Просвещение, 2001.
3. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И., Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 10 кл. ср. школы. - М.: Просвещение, 1991.
4. Галицкий М.Л. Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2001.

БЛОК 1. «АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

Содержание программы по «Алгебре и началам математического анализа» в 10-11 математическом (с углубленным изучением математики), физико-математическом, экономико-математическом, информационно-математическом и лингво-математическом / естественно-математическом классах.

10 классы

I. Повторение с элементами углубления (35/28 часов)

Равносильность уравнений. Уравнения, равносильные на множестве. Переход к следствию. Применение понятия равносильности на множестве и следствия при решении иррациональных уравнений и уравнений, содержащих знак модуля.

Метод замены переменных. Решение алгебраических уравнений методом замены переменных.

Решение дробно-рациональных неравенств. Метод интервалов. Решение неравенств, содержащих знак модуля. Решение иррациональных неравенств.

II. Многочлены (15/12 часов)

Многочлены одной переменной. Корни многочлена. Деление многочлена с остатком. Деление многочлена "уголком". Схема Горнера. Теорема Безу и ее следствия. Отыскание рациональных корней многочлена.

Многочлены от двух переменных. Симметрические многочлены от двух переменных, применение к решению задач. Однородные многочлены от двух переменных. Решение однородных алгебраических уравнений. Решение систем алгебраических уравнений. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

III. Теория функций (30/24 часов)

Понятие функции. Числовая функция. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Четность функции, свойства четных и нечетных функций.

Монотонность функции, свойства монотонных функций. Экстремумы функций. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Ограниченность функции. Периодичность функции.

Различные элементарные методы построения графиков функций.

Понятие сложной функции, обратной функции и их свойства.

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.

IV. Тригонометрические функции (42/32 часов)

Преобразование тригонометрических выражений.

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики.

Преобразование графиков тригонометрических функций.

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа.

Обратные тригонометрические функции их свойства и графики. Основные тождества на обратные тригонометрические функции.

Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Основные методы решений тригонометрических уравнений. Тригонометрические уравнения с выборкой корней на отрезке. Тригонометрические уравнения с выборкой корней на тригонометрическом круге.

Решение систем тригонометрических уравнений.

V. Показательная и логарифмическая функции (30/24 часов).

Преобразование выражений, содержащих степени. Показательная функция, ее свойства и график. Понятие логарифма числа. Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Число e . Логарифмическая функция, ее свойства и график. Построение графиков логарифмической и показательной функций.

Основные методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

VI. Закрепление с элементами углубления (25/20 часов)

Решение иррациональных уравнений и неравенств. Обобщенный метод интервалов для решения трансцендентных неравенств.

11 классы

I. Элементы теории пределов. Производная (33 часа)

Определение предела последовательности, предела функции. Односторонние пределы. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов функции. Исследование функции на непрерывность. Асимптоты графика функции.

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной функции. Производные элементарных функций. Производная суммы, разности, произведения, частного. Вычисление производных. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Вычисление производных. Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка.

Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Физический смысл производной.

II. Применение производной (21 час)

Исследование функции на монотонность. Отыскание точек локального экстремума. Необходимые и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции. Отыскание точек локального экстремума. Направление выпуклости функции. Точки перегиба.

Исследование функций с помощью производных. Построение графиков функций.

Решение прикладных задач с использованием производной.

III. Первообразная и интеграл (21/18 часов)

Первообразная и ее свойства. Первообразные элементарных функций. Понятие о неопределенном интеграле. Свойства неопределенного интеграла. Нахождение первообразных простейших элементарных функций. Непосредственное интегрирование. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование заменой переменной.

Геометрические и физические задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Геометрический смысл определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов.

Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Вычисление площади плоских фигур.

IV. Комплексные числа (9/0 часов)

Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация

комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Возведение комплексных чисел в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.

V. Обобщающее повторение с элементами углубления (86/64 часов)

Преобразование иррациональных и тригонометрических выражений. Решение уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств. Решение тригонометрических уравнений и их систем. Решение логарифмических уравнений, неравенств и их систем. Решение показательных уравнений, неравенств и их систем. Уравнения и неравенства с параметрами.

Решение задач на применение понятий производной и интеграла.

Повторение будет распределено по всему учебному году.

Тематическое планирование

10 математическом(с углубленным изучением математики), физико-математический, информационно-математический, экономико-математический, лингво-математический

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	I. Повторение с элементами углубления.	35	
1	Целые уравнения.	1	
2	Дробно-рациональные уравнения.	1	
3	Решение алгебраических уравнений методом замены переменной.	1	
4	Решение однородных уравнений.	1	
5	Решение возвратных уравнений.	1	
6, 7	Дробно-рациональные неравенства, метод интервалов.	2	
8	Решение систем и совокупностей неравенств.	1	
9, 10	Решение алгебраических неравенств методом замены переменной.	2	
11	Модуль действительного числа и его свойства. Геометрическая интерпретация модуля.	1	
12	Алгебраические уравнения, содержащие знак модуля.	1	
13	Решение уравнений, содержащих знак модуля.	1	
14	Алгебраические неравенства, содержащие знак модуля.	1	
15	Решение неравенств, содержащих знак модуля.	1	
16	Метод интервалов для раскрытия знака модуля.	1	
17	Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.	1	
18, 19	Решение алгебраических уравнений с параметром.	2	
20	Контрольная работа № 1.		1
21	Основные виды иррациональных уравнений.	1	
22-24	Решение иррациональных уравнений.	3	
25	Основные виды иррациональных неравенств.	1	
26-28	Решение иррациональных неравенств.	3	
29	Решение систем иррациональных уравнений.	1	
30	Решение систем иррациональных неравенств.	1	
31-33	Решение иррациональных уравнений и неравенств с параметром.	3	

34	Обобщающее занятие.	1	
35	Контрольная работа № 2.		1
	II. Многочлены.	15	
36	Многочлены одной переменной Деление многочлена «уголком».	1	
37	Схема Горнера. Теорема Безу и ее следствия.	1	
38	Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Разложение многочлена на множители.	1	
39-41	Решение алгебраических уравнений и неравенств высших степеней.	3	
42	Многочлены от двух переменных. Симметрические и однородные многочлены от двух переменных.	1	
43	Методы решения систем алгебраических уравнений.	1	
44-46	Решение систем алгебраических уравнений.	3	
47, 48	Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.	2	
49	Обобщающее занятие.	1	
50	Контрольная работа № 3.		1
	III. Теория функций.	30	
51	Понятие функции. Способы задания функции. Графики функции.	1	
52	Область определения и множество значений функции.	1	
53	Нули функции. Промежутки знакопостоянства.	1	
54	Монотонность функции.	1	
55	Понятие сложной функции и ее свойства. Определение свойств сложных функций.	1	
56, 57	Свойства монотонных функций.	2	
58	Применение монотонности к решению задач.	1	
59	Чётность функций, свойства чётных и нечётных функций.	1	
60	Ограниченность функции. Периодичность функции.	1	
61	Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.	1	
62, 63	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	2	
64, 65	Элементарные преобразования графиков.	2	
66, 67	Построение графиков с модулем.	2	
68	Понятие обратной функции и ее свойства.	1	
69	Решение задач на свойства функций.	1	
70	Решение алгебраических уравнений.	1	
71, 72	Решение алгебраических неравенств.	2	
73	Решение систем уравнений.	1	
74	Подготовка к контрольной работе.	1	
75	Контрольная работа № 4 (итоговая за 1-й семестр)		1
76	Анализ ошибок контрольной работы.	1	

77, 78	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.	2	
79, 80	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.	2	
	IV. Тригонометрические функции	40	
81	Единичная окружность.	1	
82	Синус, косинус, тангенс и котангенс числа и их свойства.	1	
83-85	Основные тригонометрические формулы. Формулы приведения.	3	
86	Формулы сложения.	1	
87, 88	Формулы двойного угла. Формулы половинного угла.	2	
89, 90	Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и в сумму.	2	
91-94	Преобразование тригонометрических выражений.	4	
95	Контрольная работа № 5.		1
96	Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и их свойства и графики.	1	
97	Преобразование графиков тригонометрических функций.	1	
98	Арксинус, арккосинус числа. Арктангенс и арккотангенс числа.	1	
99-101	Основные тождества на обратные тригонометрические функции.	3	
102	Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики	1	
103, 104	Решение задач.	2	
105	Контрольная работа № 6.		1
106	Тригонометрические уравнения. Решение простейших тригонометрических уравнений.	1	
107	Основные методы решения тригонометрических уравнений.	1	
108-110	Решение тригонометрических уравнений.	3	
111-113	Отбор корней тригонометрического уравнения.	3	
114, 115	Решение тригонометрических неравенств.	2	
116, 117	Решение систем тригонометрических уравнений.	2	
118, 119	Решение задач.	2	
120	Контрольная работа № 7.		1
	V. Показательная и логарифмическая функции.	30	
121	Степень с действительным показателем и ее свойства.	1	
122, 123	Преобразование выражений, содержащих степени.	2	
124, 125	Показательная функции, её свойства и график.	2	
126	Основные методы решения показательных уравнений.	1	
127	Решение показательных уравнений.	1	
128	Основные методы решения показательных неравенств.	1	
129	Решение показательных неравенств.	1	
130	Решение систем показательных уравнений.	1	

131	Понятие логарифма числа. Десятичные и натуральные логарифмы. Число e .	1	
132	Основные логарифмические тождества. Свойства логарифмов.	1	
133, 134	Преобразование выражений, содержащих логарифмы.	2	
135, 136	Логарифмическая функция, её свойства и график.	2	
137	Основные методы решения логарифмических уравнений.	1	
138, 139	Решение логарифмических уравнений.	2	
140	Основные методы решения логарифмических неравенств.	1	
141-143	Решение логарифмических неравенств.	3	
144, 145	Решение систем логарифмических уравнений.	2	
146, 147	Решение систем логарифмических неравенств.	2	
148, 149	Решение задач.	2	
150	Контрольная работа № 8.		1
	VI Закрепление с элементами углубления.	25	
151	Решение иррациональных уравнений.	1	
152, 153	Решение иррациональных неравенств.	2	
154, 155	Решение алгебраических уравнений и неравенств с модулем.	2	
156	Решение трансцендентных уравнений с модулем.	1	
157, 158	Решение трансцендентных неравенств с модулем.	2	
159, 160	Метод интервалов для решения трансцендентных неравенств.	2	
161, 162	Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций.	2	
163-165	Смешанные уравнения и неравенства.	3	
166 169	Решение задач, Подготовка к контрольной работе.	4	
170	Контрольная работа № 9. (итоговая)		1
171	Анализ контрольной работы.	1	
172-175	Решение задач.	4	
		166	9

10 естественно-математический класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	I. Повторение с элементами углубления.	28	
1	Целые уравнения. Дробно-рациональные уравнения.	1	
2	Решение алгебраических уравнений методом замены переменной.	1	
3	Решение однородных уравнений.	1	
4	Решение возвратных уравнений.	1	
5	Дробно-рациональные неравенства, метод интервалов.	1	
6	Решение систем и совокупностей неравенств.	1	

7, 8	Решение алгебраических неравенств методом замены переменной.	2	
9	Модуль действительного числа и его свойства. Геометрическая интерпретация модуля.	1	
10	Алгебраические уравнения, содержащие знак модуля.	1	
11, 12	Алгебраические неравенства, содержащие знак модуля.	2	
13	Метод интервалов для раскрытия знака модуля.	1	
14, 15	Решение уравнений и неравенств с модулем.	2	
16	Контрольная работа № 1.		1
17	Основные виды иррациональных уравнений.	1	
18-20	Решение иррациональных уравнений.	3	
21	Основные виды иррациональных неравенств.	1	
22-24	Решение иррациональных неравенств.	3	
25-27	Решение систем иррациональных уравнений и неравенств.	3	
28	Контрольная работа № 2.		1
	II. Многочлены.	12	
29	Многочлены одной переменной Деление многочлена «уголком».	1	
30	Схема Горнера. Теорема Безу и ее следствия.	1	
31	Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.	1	
32	Разложение многочлена на множители.	1	
33, 34	Решение алгебраических уравнений и неравенств высших степеней.	2	
35	Многочлены от двух переменных. Симметрические и однородные многочлены от двух переменных.	1	
36	Методы решения систем алгебраических уравнений.	1	
37,38	Решение систем алгебраических уравнений.	2	
39	Подготовка к контрольной работе.	1	
40	Контрольная работа № 3.		1
	III. Теория функций.	24	
41	Понятие функции. Способы задания функции. Графики функции.	1	
42	Область определения и множество значений функции.	1	
43	Нули функции. Промежутки знакопостоянства.	1	
44	Понятие сложной функции и ее свойства.	1	
45	Монотонность функции. Свойства монотонных функций.	1	
46	Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функций.	1	
47	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	1	
48	Чётность функций, свойства чётных и нечётных функций.	1	
49	Ограниченность функции. Периодичность функции.	1	
50	Элементарные преобразования графиков.	1	

51-52	Построение графиков с модулем.	2	
53	Понятие обратной функции и ее свойства.	1	
54-55	Решение задач на свойства функций.	2	
56	Решение алгебраических уравнений.	1	
57	Решение алгебраических неравенств.	1	
58	Решение систем уравнений.	1	
59	Подготовка к контрольной работе.	1	
60	Контрольная работа № 4 (итоговая за 1-й семестр)		1
61	Анализ ошибок контрольной работы.	1	
62, 63	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.	2	
64	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.	1	
	IV. Тригонометрические функции	32	
65	Единичная окружность.	1	
66	Синус, косинус, тангенс и котангенс числа и их свойства.	1	
67, 68	Основные тригонометрические формулы. Формулы приведения.	2	
69	Формулы сложения.	1	
70, 71	Формулы двойного угла. Формулы половинного угла.	2	
72	Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и в сумму.	1	
73-75	Преобразование тригонометрических выражений.	3	
76	Контрольная работа № 5.		1
77	Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики.	1	
78	Преобразование графиков тригонометрических функций.	1	
79	Арксинус, арккосинус числа. Арктангенс и арккотангенс числа.	1	
80	Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики	1	
81, 82	Основные тождества на обратные тригонометрические функции.	2	
83	Решение задач.	1	
84	Контрольная работа № 6.		1
85	Тригонометрические уравнения. Решение простейших тригонометрических уравнений.	1	
86	Основные методы решения тригонометрических уравнений.	1	
87, 88	Решение тригонометрических уравнений.	2	
89 90	Отбор корней тригонометрического уравнения.	2	
91, 92	Решение систем тригонометрических уравнений.	2	
93, 94	Решение тригонометрических неравенств.	2	
95	Решение задач.	1	
96	Контрольная работа № 7.		1

	V. Показательная и логарифмическая функции.	24	
97	Степень с действительным показателем и её свойства.	1	
98	Преобразование выражений, содержащих степени.	1	
99, 100	Показательная функции, её свойства и график. Построение графика показательной функции.	2	
101	Основные методы решения показательных уравнений.	1	
102	Решение показательных уравнений.	1	
103	Основные методы решения показательных неравенств.	1	
104	Решение показательных неравенств.	1	
105	Решение показательных уравнений и неравенств.	1	
106	Понятие логарифма числа. Десятичные и натуральные логарифмы. Число e .	1	
107	Основные логарифмические тождества. Свойства логарифмов.	1	
108	Преобразование выражений, содержащих логарифмы.	1	
109	Логарифмическая функция, её свойства и график.	1	
110	Основные методы решения логарифмических уравнений.	1	
111, 112	Решение логарифмических уравнений.	2	
113	Основные методы решения логарифмических неравенств.	1	
114, 115	Решение логарифмических неравенств.	2	
116, 117	Решение логарифмических уравнений и неравенств.	2	
118, 119	Подготовка к контрольной работе.	1	
120	Контрольная работа № 8.		1
	VI Закрепление с элементами углубления.	20	
121	Решение иррациональных уравнений.	1	
122, 123	Решение иррациональных неравенств.	2	
124, 125	Решение алгебраических уравнений и неравенств с модулем.	2	
126, 127	Решение трансцендентных уравнений с модулем.	2	
128, 129	Решение трансцендентных неравенств с модулем.	2	
130, 131	Метод интервалов для решения трансцендентных неравенств.	2	
132, 133	Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций.	2	
134, 135	Решение задач.	2	
136	Контрольная работа № 9. (итоговая)		1
137, 138	Анализ контрольной работы.	2	
139, 140	Обобщающее повторение.	3	
		131	9

11 математическом (с углубленным изучением математики), физико-математический, информационно-математический, экономико-математический, лингво-математический классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	I. Теория пределов. Производная.	33	

1	Повторение понятия функции и основных свойств функции, элементарные методы исследования функций.	1	
2	Числовые последовательности. Монотонные и ограниченные последовательности.	1	
3	Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.	1	
4	Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.	1	
5	Длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей	1	
6	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.	1	
7	Вычисление предела последовательности.	1	
8	Понятие предела функции. Основные теоремы о пределах.	1	
9	Методы раскрытия неопределённостей.	1	
10	Первый и второй замечательные пределы.	1	
11	Вычисление пределов функций.	1	
12	Односторонние пределы.	1	
13	Исследование функции на непрерывность,	1	
14	Асимптоты графика функции.	1	
15	Нахождение асимптот.	1	
16	Задачи, приводящие к понятию производной.	1	
17	Понятие производной. Основные правила дифференцирования	1	
18	Производные основных элементарных функций.	1	
19	Нахождение производных.	1	
20	Нахождение производной в точке.	1	
21	Производная композиции функций.	1	
22	Производная обратной функции.	1	
23	Производные обратных тригонометрических функций.	1	
24	Вычисление производных.	1	
25	Физический смысл производной.	1	
26	Производная второго порядка и ее физический смысл.	1	
27	Производные высших порядков.	1	
28	Решение задач на физический смысл производной.	1	
29	Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.	1	
30, 31	Решение задач на геометрический смысл производной.	2	
32	Подготовка к контрольной работе.	1	
33	Контрольная работа №1.		1
	II. Применение производной.	21	
34	Теорема Ферма.	1	
35	Теорема Лагранжа. Признак постоянства.	1	
36	Признак монотонности функции.	1	
37	Отыскание точек локального экстремума.	1	
38	Исследование функций с помощью первой производной.	1	
39	Наибольшее и наименьшее значения функции.	1	
40	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	1	
41	Выпуклость графика функции, точки перегиба.	1	
42	Исследование функций с помощью второй производной.	1	

43	Схема полного исследования функции.	1	
44 - 47	Полное исследование функции и построение графика.	4	
48	Решение прикладных задач с использованием производной.	1	
49	Использования производной для нахождения наилучшего решения в социально-экономических задачах.	1	
50	Использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.	1	
51	Геометрические задачи на применение производной	1	
52	Физические задачи на применение производной.	1	
53	Подготовка к контрольной работе.	1	
54	Контрольная работа № 2.		1
	III. Первообразная и интеграл.	18	
55	Понятие первообразной и её свойства. Первообразные элементарных функций.	1	
56	Неопределенный интеграл и его свойства.	1	
57	Основные методы интегрирования.	1	
58	Интегрирование заменой переменной.	1	
59	Интегрирование рациональных дробей.	1	
60	Табличное интегрирование.	1	
61	Решение задач на первообразную.	1	
62	Площадь криволинейной трапеции. Определение определенного интеграла.	1	
63	Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.	1	
64, 65	Вычисление определённого интеграла.	2	
66	Применение интегралов для вычисления площадей.	1	
67	Вычисление площадей плоских фигур.	1	
68	Применение интегралов для вычисления объемов тел вращения.	1	
69, 70	Использование интеграла в физических задачах.	2	
71	Подготовка к контрольной работе.	1	
72	Контрольная работа №3.		1
	IV. Комплексные числа.	9	
73	Алгебраическая форма комплексного числа.	1	
74	Действия над комплексными числами в алгебраической форме.	1	
75	Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент.	1	
76	Построение г.м.т. на комплексной плоскости.	1	
77	Тригонометрическая форма комплексного числа	1	
78	Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.	1	
79	Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.	1	
80	Подготовка к контрольной работе.	1	
81	Контрольная работа № 4		1
	V. Повторение с элементами углубления.	54	
82	Решение алгебраических уравнений.	1	
83	Решение алгебраических уравнений методом замены переменной.	1	

84-87	Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.	4	
88-91	Решение иррациональных уравнений и неравенств.	4	
92, 93	Решение систем алгебраических уравнений.	2	
94, 95	Алгебраические уравнения с параметрами.	2	
96, 97	Преобразование тригонометрических выражений.	2	
98	Основные методы решения тригонометрических уравнений.	1	
99, 100	Решение тригонометрических уравнений.	2	
101	Отбор корней тригонометрических уравнений.	1	
102	Системы тригонометрических уравнений.	1	
103	Тригонометрические неравенства и их системы.	1	
104, 105	Тригонометрические уравнения с параметрами.	2	
106-109	Решение уравнений и неравенств смешанного типа.	4	
110, 111	Контрольная работа за 1-е полугодие.		2
112, 113	Анализ контрольной работы. (32)	2	
114, 115	Преобразование иррациональных выражений.	2	
116	Основные методы решения показательных уравнений и неравенств.	1	
117, 118	Решение показательных неравенств.	2	
119	Показательные уравнения с параметром.	1	
120, 121	Преобразование логарифмических выражений.	2	
122	Методы решения логарифмических уравнений и неравенств.	1	
123	Решение логарифмических уравнений.	1	
124, 125	Решение логарифмических неравенств.	2	
126, 127	Решение систем логарифмических и показательных неравенств.	2	
128, 129	Логарифмические уравнения с параметрами.	2	
130, 131	Функционально-графические методы решения уравнений и неравенств.	2	
132-135	Решение трансцендентных неравенств обобщённым методом интервалов. (22)	4	
	VI. Обобщающее повторение.	35	
136	Преобразование алгебраических выражений.	1	
137, 138	Преобразование тригонометрических выражений.	2	
139, 140	Преобразование логарифмических выражений.	2	
141, 142	Решение уравнений и неравенств с модулем.	2	
143-145	Решение иррациональных уравнений и неравенств.	3	
146-150	Решение уравнений и неравенств методом замены переменной.	5	
151-153	Производная и ее применение.	3	
154, 155	Геометрический и физический смысл производной.	2	
156, 157	Первообразная функция. Интеграл.	2	
158-160	Решение задач из ЕГЭ	3	
161	Итоговая работа по части В.		1
162, 163	Итоговая работа по части С.		2
164, 165	Анализ итоговой работы.	2	
166-170	Решение задач из ЕГЭ	1	
		161	9

Тема V. «Повторение с элементами углубления» начинается с начала года 2 часа в неделю параллельно с новыми темами I.- IV., на которые отводится 3 часа в неделю. На это отводится 27 недель (примерно до конца третьей четверти). Последние 6-7 недель отводится на обобщающее повторение.

11 естественно-математический класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	I. Теория пределов. Производная.	33	
1	Повторение понятия функции и основных свойств функции, элементарные методы исследования функций.	1	
2	Числовые последовательности. Монотонные и ограниченные последовательности.	1	
3	Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.	1	
4	Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.	1	
5	Длина окружности и площадь круга как пределы последовательностей	1	
6	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.	1	
7	Вычисление предела последовательности.	1	
8	Понятие предела функции. Основные теоремы о пределах.	1	
9	Методы раскрытия неопределённостей.	1	
10	Первый и второй замечательные пределы.	1	
11	Вычисление пределов функций.	1	
12	Односторонние пределы.	1	
13	Исследование функции на непрерывность,	1	
14	Асимптоты графика функции.	1	
15	Нахождение асимптот.	1	
16	Задачи, приводящие к понятию производной.	1	
17	Понятие производной. Основные правила дифференцирования	1	
18	Производные основных элементарных функций.	1	
19	Нахождение производных.	1	
20	Нахождение производной в точке.	1	
21	Производная композиции функций.	1	
22	Производная обратной функции.	1	
23	Производные обратных тригонометрических функций.	1	
24	Вычисление производных.	1	
25	Физический смысл производной.	1	
26	Производная второго порядка и ее физический смысл.	1	
27	Производные высших порядков.	1	
28	Решение задач на физический смысл производной.	1	
29	Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.	1	
30, 31	Решение задач на геометрический смысл производной.	2	
32	Подготовка к контрольной работе.	1	
33	Контрольная работа №1.		1

	II. Применение производной.	21	
34	Теорема Ферма.	1	
35	Теорема Лагранжа. Признак постоянства.	1	
36	Признак монотонности функции.	1	
37	Отыскание точек локального экстремума.	1	
38	Исследование функций с помощью первой производной.	1	
39	Наибольшее и наименьшее значения функции.	1	
40	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	1	
41	Выпуклость графика функции, точки перегиба.	1	
42	Исследование функций с помощью второй производной.	1	
43	Схема полного исследования функции.	1	
44 - 47	Полное исследование функции и построение графика.	4	
48	Решение прикладных задач с использованием производной.	1	
49	Использования производной для нахождения наилучшего решения в социально-экономических задачах.	1	
50	Использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.	1	
51	Геометрические задачи на применение производной	1	
52	Физические задачи на применение производной.	1	
53	Подготовка к контрольной работе.	1	
54	Контрольная работа № 2.		1
	III. Первообразная и интеграл.	18	
55	Понятие первообразной и её свойства. Первообразные элементарных функций.	1	
56	Неопределенный интеграл и его свойства.	1	
57	Основные методы интегрирования.	1	
58	Интегрирование заменой переменной.	1	
59	Интегрирование рациональных дробей.	1	
60	Табличное интегрирование.	1	
61	Решение задач на первообразную.	1	
62	Площадь криволинейной трапеции. Определение определенного интеграла.	1	
63	Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.	1	
64, 65	Вычисление определённого интеграла.	2	
66	Применение интегралов для вычисления площадей.	1	
67	Вычисление площадей плоских фигур.	1	
68	Применение интегралов для вычисления объемов тел вращения.	1	
69, 70	Использование интеграла в физических задачах.	2	
71	Подготовка к контрольной работе.	1	
72	Контрольная работа №3.		1
	V. Повторение с элементами углубления.	24	
73	Решение алгебраических уравнений методом замены переменной.	1	
74, 75	Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.	2	
76, 77	Решение иррациональных уравнений и неравенств.	2	
78, 79	Алгебраические уравнения с параметрами.	2	
80, 81	Преобразование тригонометрических выражений.	2	

82	Основные методы решения тригонометрических уравнений.	1	
83	Решение тригонометрических уравнений.	1	
84	Отбор корней тригонометрических уравнений.	1	
85, 86	Тригонометрические уравнения с параметрами.	2	
87	Контрольная работа за 1-е полугодие.		1
88	Анализ контрольной работы. (16)	1	
89	Преобразование иррациональных выражений.	1	
90	Основные методы решения показательных уравнений и неравенств.	1	
91	Решение показательных неравенств.	1	
92	Показательные уравнения с параметром.	1	
93	Преобразование логарифмических выражений.	1	
94	Методы решения логарифмических уравнений и неравенств.	1	
95	Решение логарифмических уравнений.	1	
96	Решение логарифмических неравенств. (8)	1	
	VI. Обобщающее повторение.	40	
97, 98	Логарифмические уравнения с параметрами.	2	
99, 100	Функционально-графические методы решения уравнений и неравенств.	2	
101 - 104	Решение трансцендентных неравенств обобщённым методом интервалов.	4	
105	Преобразование алгебраических выражений.	1	
106, 107	Преобразование тригонометрических выражений.	2	
108, 109	Решение уравнений и неравенств с модулем.	2	
110-112	Решение иррациональных уравнений и неравенств.	3	
113, 114	Решение уравнений и неравенств методом замены переменной.	2	
115-118	Решение уравнений и неравенств смешанного типа.	4	
119, 120	Производная и ее применение.	2	
121, 122	Геометрический и физический смысл производной.	2	
123, 124	Первообразная функция. Интеграл.	2	
125-127	Решение задач из ЕГЭ	3	
128	Итоговая работа по части В.		1
129, 130	Итоговая работа по части С.		2
131, 132	Анализ итоговой работы.	2	
133-136	Обобщающее повторение.	4	
		129	7

Тема V. «Повторение с элементами углубления» начинается с начала года 1 час в неделю параллельно с новыми темами I.- IV., на которые отводится 3 часа в неделю. На это отводится 24 недели. Последние 9-10 недель отводится на обобщающее повторение.

Планируемые результаты

10 класс

Личностные результаты

— ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;

– развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

– ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

– оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;

– организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;

– сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

– находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

– выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;

– выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;

– менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

– осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;

– развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;

– выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

По разделу «Повторение с элементами углубления»

Ученик научится:

- Свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений;

- свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений;

- использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных;

- решать алгебраические уравнения и неравенства методом замены переменной;

- решать иррациональные уравнения посредством перехода к равносильной системе условий;

- решать иррациональные уравнения заменой переменной;

- решать уравнения и неравенства, содержащие знак модуля, используя его свойства и

переход к равносильным системам и совокупностям;

- решать алгебраические уравнения и неравенства с параметрами алгебраическими методами;

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов;
- выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов;

Ученик получит возможность научиться:

- свободно определять тип и выбирать метод решения уравнений и неравенств с модулем, иррациональных уравнений и неравенств;
- решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами.

По разделу «Многочлены»

Ученик научится:

- свободно оперировать понятиями многочлен, корень многочлена, стандартный вид многочлена;
- производить действия с многочленами, деление многочленов, в том числе, с помощью схемы Горнера;
- находить рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами
- основным подходам к решению задачи отыскания действительных корней многочлена, использовать теоремы о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами;
- раскладывать многочлен на множители;
- решать уравнения и неравенства степени выше второй;
- решать алгебраические системы уравнений методами подстановки, алгебраического сложения, деления уравнений, заменой переменных;
- изображать на координатной плоскости множества, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами.

Ученик получит возможность научиться:

- свободно определять тип и выбирать метод решения уравнений и неравенств содержащих многочлены степени выше второй;
- применять при решении задач многочлены с действительными и целыми коэффициентами;
- владеть понятиями приводимый и неприводимый многочлен и применять их при решении задач.

По разделу «Теория функций»

Ученик научится:

- владеть понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание на числовом промежутке, убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции на числовом промежутке, периодическая функция, период, четная и нечетная функции; обратная функция; композиция функций; уметь применять эти понятия при решении задач;
- определять свойства функций элементарными методами:
 - находить область определения функций;
 - находить множество значений функции;
 - находить нули функции и промежутки знакопостоянства;
 - исследовать функции на монотонность, ограниченность, четность.
 - строить графики функций элементарными преобразованиями;
 - строить графики функций с модулями;

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

- определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т.п.);
- интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации;
- определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.).

Ученик получит возможность научиться:

- применять графики и свойства функций при решении задач с параметрами.

По разделу «Тригонометрические функции»

Ученик научится:

- свободно оперировать терминологией, связанной с тригонометрическими функциями;
- различным мерам угла и соответствию между ними;
- владеть понятием об обратных тригонометрических функциях; о различных видах записи корней тригонометрических уравнений.
- выводить основные тригонометрические формулы, формулы приведения, формулы сложения, формулы двойного и половинного аргумента; формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведения и произведения в сумму;
- применять тригонометрические формулы для решения задач (преобразование, вычисление тригонометрических выражений, доказательство тождеств, решение уравнений);
- определять и использовать при решении задач основные свойства тригонометрических функций;
- решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств;
- уверенно применять основные методы решения тригонометрических уравнений.
- вычислять обратные тригонометрические величины;
- решать простейшие тригонометрические неравенства;
- осуществлять выборку корней тригонометрических уравнений на промежутке.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- выполнять и объяснять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений;
- составлять и оценивать разными способами тригонометрические выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов.

Ученик получит возможность научиться:

- свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, выражений;
- свободно определять тип и выбирать метод решения тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;
- решать основные типы уравнений с параметрами.

По разделу «Показательная и логарифмическая функции»

Ученик научится:

- свободно оперировать понятиями: о расширении понятия степени числа: степень с действительным показателем; о логарифме числа, в том числе, о десятичных и натуральных логарифмах;
- оперировать терминологией, связанной с данным разделом;
- доказывать свойства степени с действительным показателем, свойства логарифмов, основное логарифмическое тождество;
- применять свойства показательной и логарифмической функции при решении задач;
- производить действия над степенями с различными показателями;
- преобразовывать выражения, содержащие степени, используя их свойства;
- вычислять значения некоторых логарифмов по определению;

- преобразовывать выражения, содержащие логарифмы, используя их свойства;
- переходить к логарифмам по другому основанию;
- решать простейшие логарифмические и показательные уравнения и неравенства;
- строить графики показательных и логарифмических функций.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов;
- выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов;

Ученик получит возможность научиться:

- свободно выполнять тождественные преобразования логарифмических, степенных выражений;
- свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, их систем;
- решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами.

По разделу «Закрепление с элементами углубления»

Ученик научится:

- применять универсальные подходы к решению алгебраических и трансцендентных уравнений и неравенств;
- применять функциональные способы решения уравнений и неравенств;
- применять обобщенный метод интервалов к различным алгебраическим и трансцендентным неравенствам.
- решать иррациональные уравнения и неравенства равносильными преобразованиями выражений, содержащихся в уравнениях и неравенствах, используя свойства функций, содержащихся в них.

Ученик получит возможность научиться:

- свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;

- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

По разделу «Элементы теории пределов. Производная»

Выпускник научится:

- Владеть понятием бесконечно малых и бесконечно больших величин;
- применять для решения задач теорию пределов;
- владеть понятиями бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности и уметь сравнивать бесконечно большие и бесконечно малые последовательности;
- владеть понятиями: производная функции в точке, производная функции;
- вычислять производные элементарных функций и их комбинаций;
- владеть понятием касательная к графику функции и уметь применять его при решении задач;
- вычислять пределы функций;
- исследовать функцию на непрерывность;

- находить асимптоты графика функции;
- вычислять производные различных функций, в том числе сложных;
- вычислять производные высших порядков;
- составлять уравнение касательной к графику функции.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

- решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов;
- интерпретировать полученные результаты.

Выпускник получит возможность научиться:

- свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;
- оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;
- уметь применять при решении задач свойства непрерывных функций;

По разделу «Применение производной»

Выпускник научится:

- оперировать понятиями локального экстремума, глобального экстремума;
- определять множество значений функции;
- исследовать функцию с помощью производной;
- строить график функции по ее свойствам.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

- решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов.

Выпускник получит возможность научиться:

- свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;
- уметь применять приложение производной к решению задач естествознания;
- владеть понятиями вторая производная, выпуклость графика функции и уметь исследовать функцию на выпуклость

По разделу «Интеграл»

Выпускник научится:

- владеть терминологией, связанной с теорией интегрирования;
- владеть понятиями первообразная функция, определенный интеграл;
- находить первообразные элементарных функций;
- проводить непосредственное интегрирование;
- вычислять определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница и через их геометрическую интерпретацию;
- вычислять площади плоских фигур.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

- решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с применением определенного интеграла.

Выпускник получит возможность научиться:

- оперировать понятием первообразной функции для решения задач;
- уметь применять приложение определенного интеграла к решению задач естествознания.

По разделу «Комплексные числа»

Выпускник научится:

- оперировать понятием комплексного числа, различными способами задания комплексного числа; терминологией, связанной с комплексными числами;
- изображать комплексные числа на координатной плоскости точками и радиус-

векторами;

- производить действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.
- выполнять операций над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах;

Выпускник получит возможность научиться:

- иметь базовые представления о множестве комплексных чисел;
- применять при решении задач простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования.

По разделу «Повторение с элементами углубления»

Выпускник научится:

- осуществлять общие подходы к решению алгебраических и трансцендентных уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств;
- различать универсальные и специфические для каждого вида уравнений и неравенств методы решения, систем уравнений и неравенств;
- решать уравнения и неравенства методом разложения на множители, заменой переменной, равносильными преобразованиями выражений, содержащихся в уравнениях и неравенствах, используя свойства функций, содержащихся в них.

Выпускник получит возможность научиться:

- решать уравнения и неравенства с параметрами различными методами.

БЛОК 2. «ГЕОМЕТРИЯ»

Содержание программы по «Геометрии» в 10-11 математическом, физико-математическом (с углубленным изучением математики), экономико-математическом, информационно-математическом, естественно-математическом и лингво-математическом классах.

10 класс

I. Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей (16 часов)

Аксиомы стереометрии и их следствия. Понятие о неевклидовой геометрии. Простейшие задачи на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Параллельные прямые. Параллельность прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Параллельность плоскостей.

II. Перпендикулярность прямых и плоскостей (16 часов)

Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до фигуры. Двугранные углы. Перпендикулярность плоскостей.

III. Многогранники (20 часов)

Понятия многогранника Призма и параллелепипед. Свойства граней и диагоналей параллелепипедов. Пирамида. Свойства параллельных сечений в пирамиде. Боковая поверхность призмы и пирамиды. Правильные многогранники.

IV. Векторы в пространстве (8 часов)

Понятие вектора в пространстве. Линейные операции над векторами в пространстве. Компланарные векторы. Разложение вектора по базису.

V. Повторение. Решение задач (8 часа)

11 класс.

I. Метод координат в пространстве (14 часов)

Декартова система координат в пространстве. Координаты точки и вектора в пространстве. Скалярное произведение векторов. Движения.

II Тела вращения (18 часов)

Конические поверхности. Прямой круговой конус. Сечения конуса плоскостью. Развертка цилиндра. Площадь поверхности цилиндра.

Сфера. Шар. Взаимное расположение шара и плоскости. Уравнение сферы. Свойства касательных и секущих к сфере. Площадь сферы.

III Объемы тел (24 часов)

Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямой и наклонной призмы. Объем цилиндра. Объем пирамиды, усеченной пирамиды. Объем конуса. Объем шара, шарового сегмента, шарового сектора и шарового слоя.

IV Повторение. Решение задач (12 часов)

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

10 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	I. Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей.	16	
1	Аксиомы стереометрии	1	
2	Следствия из аксиом стереометрии	1	
3	Параллельные прямые. Параллельность трех прямых.	1	
4	Параллельность прямой и плоскости.	1	
5	Скрещивающиеся прямые.	1	
6	Угол между прямыми.	1	
7	Параллельность плоскостей.	1	
8	Свойства параллельных плоскостей.	1	
9	Решение задач.	1	
10, 11	Тетраэдр. Построение простейших сечений.	2	
12, 13	Параллелепипед. Построение простейших сечений.	2	
14	Решение задач.	1	
15	Контрольная работа № 1	1	1
16	Работа над ошибками	1	
	II. Перпендикулярность прямых и плоскостей.	16	
17	Перпендикулярные прямые в пространстве	1	
18, 19	Перпендикулярность прямой и плоскости.	2	
20	Перпендикуляр и наклонные плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между скрещивающимися прямыми.	1	
21	Теорема о трех перпендикулярах.	1	
22	Расстояние от точки до прямой.	1	
23	Угол между прямой и плоскостью.	1	
24	Решение задач.	1	
25	Двугранные углы.	1	
26	Признак перпендикулярности плоскостей.	1	
27	Прямоугольный параллелепипед.	1	
28	Решение задач.	1	
29	Контрольная работа № 2.	1	1
30	Работа над ошибками	1	

31	Трехгранный угол	1	
32	Многогранный угол	1	
	V. Многогранники.	20	
33	Понятие многогранника. Геометрическое тело.	1	
34	Призма и параллелепипед. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.	1	
35	Боковая и полная поверхность призмы.	1	
36	Пространственная теорема Пифагора.	1	
37, 38	Решение задач.	2	
39	Пирамида.	1	
40	Правильная пирамида.	1	
41	Площадь боковой и полной поверхности пирамиды.	1	
42	Свойства параллельных сечений в пирамиде.	1	
43	Решение задач	1	
44	Усеченная пирамида.	1	1
45, 46	Площадь боковой и полной поверхности усеченной пирамиды.	2	
47	Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника.	1	
48	Элементы симметрии правильных многогранников	1	
49	Решение задач.	1	
50	Подготовка к контрольной работе.	1	
51	Контрольная работа № 3	1	1
52	Работа над ошибками	1	
	V. Векторы в пространстве	8	
53	Понятие вектора в пространстве.	1	
54, 55	Линейные операции над векторами в пространстве.	2	
56	Компланарные векторы. Правило параллелепипеда.	1	
57, 58	Компланарные векторы. Разложение вектора по базису.	2	
59-60	Решение задач	1	
	VI. Повторение	8	
61,62	Призма и параллелепипед. Решение задач.	2	
63, 64	Пирамида. Решение задач.	2	1
65-66	Векторы. Решение задач	2	
67	Подготовка к контрольной работе	1	
68	Итоговая контрольная работа.	1	1
69-70	Обобщающее повторение.	2	

11 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Тема I. Векторы и координаты в пространстве	14	
1	Декартова система координат в пространстве.	1	
2	Простейшие задачи в декартовой системе координат.	1	
3,4	Решение задач в координатной плоскости.	2	
5	Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения	1	

6-9	Применение скалярного произведения к решению задач по стереометрии.	4	
10,11	Движения.	2	
12,13	Применение метода координат к решению задач.	2	
14	Контрольная работа № 1		1
	Тема II. Круглые тела	18	
15,16	Цилиндр. Поверхность цилиндра.	2	
17,18	Конус. Поверхность конуса.	2	
19,20	Решение задач.	2	
21,22	Усеченный конус. Поверхность усеченного конуса.	2	
23,24	Шар. Сечения шара плоскостью. Плоскость касательная к шару	2	
25,26	Свойства касательных и секущих к шару.	2	
27,28	Поверхность шара.	2	
29-31	Решение задач.	3	
32	Контрольная работа №2		1
	Тема III. Объемы многогранников	24	
33	Понятие объема тела.	1	
34	Объем прямого параллелепипеда.	1	
35, 36	Объем прямой призмы.	2	
37, 38	Объем наклонной призмы.	2	
39, 40	Объем цилиндра	2	
41, 42	Решение задач.	2	
43, 44	Объем пирамиды.	2	
45,46	Объем конуса	2	
47, 48	Объем усеченной пирамиды. Объем усеченного конуса.	2	
49, 50	Объем шара и его частей.	2	
51 - 54	Решение задач.	4	
55, 56	Контрольная работа №3		2
	Тема IV. Повторение	12	
57-60	Решение задач по планиметрии	4	
61-64	Решение задач по стереометрии	4	
68	Решение задач ЕГЭ	4	

Планируемые результаты.

10 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах фигур, проводить в несложных случаях классификацию фигур по различным основаниям;
- исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;
- решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;
- владеть понятиями стереометрии: призма, параллелепипед, пирамида, тетраэдр;
- иметь представления об аксиомах стереометрии и следствиях из них и уметь применять их при решении задач;
- уметь строить сечения многогранников с использованием различных методов, в том числе и метода следов;
- иметь представление о скрещивающихся прямых в пространстве и уметь находить угол и расстояние между ними;
- применять теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве при решении задач;
- уметь применять перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач;

- владеть понятиями ортогональное проектирование, наклонные и их проекции, уметь применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач;
- владеть понятиями расстояние между фигурами в пространстве, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и уметь применять их при решении задач;
- владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач;
- владеть понятиями двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярные плоскости и уметь применять их при решении задач;
- владеть понятиями призма, параллелепипед и применять свойства параллелепипеда при решении задач;
- владеть понятием прямоугольный параллелепипед и применять его при решении задач;
- владеть понятиями пирамида, виды пирамид, элементы правильной пирамиды и уметь применять их при решении задач;
- иметь представление о правильных многогранниках;
- владеть понятием площади поверхностей многогранников и уметь применять его при решении задач;
- владеть понятием вектора;
- выполнять операции над векторами;
- использовать скалярное произведение векторов при решении задач;
- применять векторы в пространстве при решении задач

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Учащиеся получают возможность научиться:

- применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов, трехгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла;
- владеть понятием перпендикулярное сечение призмы и уметь применять его при решении задач;
- иметь представление о двойственности правильных многогранников;
- иметь представление о развертке многогранника и кратчайшем пути на поверхности многогранника;
- применять при решении задач формулу расстояния от точки до плоскости;
- иметь представление о площади ортогональной проекции;
- иметь представление о трехгранном и многогранном угле и применять свойства плоских углов многогранного угла при решении задач;
- иметь представления о преобразовании подобия, гомотетии и уметь применять их при решении задач.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;

- самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах фигур, проводить в несложных случаях классификацию фигур по различным основаниям;
- исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;
- решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;
- владеть понятиями стереометрии: призма, параллелепипед, пирамида, тетраэдр;
- иметь представления об аксиомах стереометрии и следствиях из них и уметь применять их при решении задач;
- уметь строить сечения многогранников с использованием различных методов, в том числе и метода следов;
- владеть понятиями тела вращения (цилиндр, конус, шар и сфера), их сечения и уметь применять их при решении задач;
- владеть понятиями касательные прямые и плоскости и уметь применять их при решении задач;
- иметь представления о вписанных и описанных сферах и уметь применять их при решении задач;
- владеть понятиями объем, объемы многогранников, тел вращения и применять их при решении задач;
- иметь представление о развертке цилиндра и конуса, площади поверхности цилиндра и конуса, уметь применять их при решении задач;
- иметь представление о площади сферы и уметь применять его при решении задач;
- уметь решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения;
- иметь представление о подобии в пространстве и уметь решать задачи на отношение объемов и площадей поверхностей подобных фигур;
- владеть понятиями векторы и их координаты;
- выполнять операции над векторами;
- использовать скалярное произведение векторов при решении задач;
- применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач;
- применять метод координат в пространстве при решении задач

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат

Выпускник получит возможность научиться:

- владеть понятием геометрические места точек в пространстве и уметь применять их для решения задач;
- иметь представление о конических сечениях;
- иметь представление о касающихся сферах и комбинации тел вращения и уметь применять их при решении задач;
- владеть разными способами задания прямой уравнениями и уметь применять при решении задач;
- применять при решении задач и доказательстве теорем метод координат;
- иметь представление об аксиомах объема, применять формулы объемов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды, тетраэдра при решении задач;

- применять теоремы об отношениях объемов при решении задач;
- применять интеграл для вычисления объемов и поверхностей тел вращения, вычисления площади сферического пояса и объема шарового слоя;
- иметь представление о площади ортогональной проекции;
- находить объем параллелепипеда и тетраэдра, заданных координатами своих вершин;
- задавать прямую в пространстве;
- находить расстояние от точки до плоскости в системе координат;
- находить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат.

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

Контрольная работа по теме «Решение рациональных уравнений и неравенств»

1. Решить уравнения:

1) $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$; 2) $(3x^2 + 7x - 2)^2 - 5x^2(3x^2 + 7x - 2) - 24x^4 = 0$;

3) $|x - 6| = x^2 - 5x + 9$; 4) $|x^2 - 6x + 8| = 4 - x$.

2. Решите неравенства:

1) $\frac{x^4(x+5)^5(x-2)^2(3-x)^3}{(2x+3)^5(x-1)^3(4-x)^6} \geq 0$; 2) $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x-3)(x-4) \geq 1$.

3) $|x - 4| > x^2 - 7x + 12$; 4) $|x^2 + 4x| \leq 1 - 2x$; 5) $\frac{|2x - 1|}{x + 2} \leq 4$.

Контрольная работа по теме «Решение иррациональных уравнений и неравенств».

Решите уравнения: 1. $(x^2 + 5x)\sqrt{x - 3} = 0$; 2. $x - \sqrt{x + 2} = 4$;

3. $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$; 4. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

Решите неравенства: 1. $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} \leq 2$; 2. $\sqrt{2x+3} \leq x$;

3. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$; 4. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \leq 1$.

Контрольная работа по теме «Функции и графики»

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{10 + 3x - x^2}$.

2. Найдите нули функции $y = x^2 + |x + 4| - 4$.

3. Найдите множество значений функции $y = 2x^2 + 4x + 5$.

4. Чётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 7. Найдите значение выражения $f(-114) \cdot f(86) + f(-37)$, если $f(2) = -5$.

5. Построить графики функций: 1) $y = x^2 + 4|x| + 3$; 2) $y = |2 - \sqrt{2 - x}|$; 3) $y = \frac{2x + 3}{|x + 2|}$.

Контрольная работа по теме «Преобразование тригонометрических выражений».

1. Доказать тождество $\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - a\right)}{1 - \sin(a - \pi)} - \frac{\cos(a - 3\pi)}{1 + \cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\cos a}$.

2. Упростить выражение $\frac{1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a}{\cos a + 2\cos^2 a - 1}$ и вычислить при $a = \frac{2\pi}{3}$.

3. Вычислить $\frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.
4. Вычислить $\sin^4 a + \cos^4 a$, если $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Контрольная работа по теме «Тригонометрические и обратные тригонометрические функции».

1. Построить графики функций:

1. $y = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}$, 2. $y = \cos^2 x - \sin^2 x$,

3. $y = 3 \sin \frac{x}{2} - 1$, 4. $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 5. $y = |\operatorname{ctg} x|$.

2. Вычислить:

1. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$, 2. $\operatorname{arctg}(-1)$, 3. $\sin\left(\pi - \arcsin \frac{1}{2}\right)$,

4. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, 5. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$, 6. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \arccos \frac{3}{7}\right)$

Контрольная работа по теме «Решение тригонометрических уравнений».

1. Решить уравнение $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и найти его наибольший отрицательный корень.

2. Решить уравнение $\sin \frac{2x}{3} = 0$ и найти его корни из промежутка $[-2\pi; 2\pi]$.

3. Решить уравнения:

а) $\sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$;

б) $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$;

в) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -2$;

г) $3 \sin x - 2 \cos x = 2$;

д) $\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = 0$;

е) $3 \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 2$.

4. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\cos x = \frac{3a+1}{a-5}$ не имеет решений.

Контрольная работа по теме «Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств».

Решите уравнения:

1) $243 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{3x-2} = 27^{x+2}$; 2) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$; 3) $5 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 6$;

4) $\log_3(x+2) + \log_3 x = 1$; 5) $\lg^2 x - 5 \lg x + 6 = 0$; 6) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{x+1} + \log_{27}(x+1) = \frac{2}{3}$.

Решить неравенства:

1) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-4} \geq 0,2^{x+1}$; 2) $0,5^{x^2} \cdot 4^{x+1} > 64^{-1}$; 3) $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 \leq 0$;

4) $\log_5(3-8x) > 0$; 5) $\log_{\frac{1}{3}}(7-x) > -2$; 6) $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3)$

Контрольная работа за первое полугодие.

ЧАСТЬ 1

A1. Найдите сумму корней уравнения $2x^2 + 5x - 38 = 0$.

A2. Найдите множество значений функции $y = 2 - x^2$.

A3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{3 - |x|}$.

A4. Решите неравенство $x - \frac{25}{x} \leq 0$.

ЧАСТЬ 2

B1. Решите уравнение $4x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x + 4 = 0$.

B2. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{4x - x^2} > x - 5$.

B3. Найдите точки пересечения графиков функций $y = |x - 6|$ и $y = x^2 - 5x + 9$.

ЧАСТЬ 3

C1. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 2x + 3$ на отрезке $[2; 5]$.

C2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2xy, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

C3. Решите неравенство $\frac{x - 2a + 1}{x - a} < 0$ и найдите все значения параметра a , при которых множество его решений содержит отрезок $[1; 2]$.

Итоговая контрольная работа за 10-й класс.

B1. Найдите значение выражения $2 \cdot 3^{\log_3 6}$.

B2. Упростите выражение $\frac{4 \sin x \cos x}{3 \sin 2x}$.

B3. Найдите множество значений функции $y = 2 \sin x + 3$.

B4. Решите неравенство $x - \frac{25}{x} \leq 0$.

B5. Решите уравнение $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$.

B6. Найдите область определения функции $y = \sqrt{5^{7x+3} - \frac{1}{5}}$.

B7. Решите уравнение $4^x - 2^{x+1} = 48$.

B8. Решите неравенство $\log_3(2x + 8) - \log_3 12 \geq \log_3 x$. В ответе запишите длину полученного промежутка.

B9. Решите уравнение $\sqrt{21 - 4x} = x - 4$.

B10. Найдите значение выражения $5\sqrt{3}(\cos^2 15^\circ - \cos^2 105^\circ)$.

B11. Найдите значение выражения $\log_5(216 \cdot \sqrt[3]{36}) \cdot \log_6(8 \cdot 10^{-3})$.

C1. Решите уравнение $2\sqrt{x+1} - \frac{4}{\sqrt{x+1}} + 7 = 0$.

C2. Найдите область определения функции $y = \log_x(9 - |9,25 - x^2|)$.

C3. Решите систему уравнений $\begin{cases} (y - 5)\log_3(x - 1,5) = \log_3(x - 1,5), \\ 7x^2 - 4x - (y + 14) = 0. \end{cases}$

Контрольная работа

1. В треугольнике со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найти площадь треугольника AMN , где M , N — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AP . Известно, что $AC = 1$ и $\angle DCP = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника DBP .

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD , $BE \perp BC$, $BD:DC=2:1$. Площадь треугольника DEC равна 20 см^2 . Найдите площадь треугольника ABC .
4. $ABCD$ — прямоугольник. $AB=4$, $BC=6$, $BE \perp AC$. Через точку E проведена прямая, параллельная AD , до пересечения в точке P со стороной CD . Найдите EP .
5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP . Известно, что $BP=16$, $PC=20$ и что центр окружности, описанной около треугольника ABP , лежит на отрезке AC . Найти длину стороны AB .
6. В треугольнике ABC известны длины высот m , n и p . Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

Контрольная работа

1. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна 28 , а площадь основания равна 4 . Найти длину бокового ребра призмы.
2. Через диагональ нижнего основания куба и противоположную вершину его верхнего основания проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если сторона куба равна a .
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если диагональ основания равна $2\sqrt{2}$, а длина бокового ребра равна $\sqrt{5}$.
4. Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BM , перпендикулярная к его плоскости. Найти расстояние от точки M до плоскости ромба, если, $AB=4$, $\angle BAD=60^\circ$ и точка M удалена от прямой AD на расстояние, равное длине стороны ромба.

Контрольная работа

1. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 120° , а боковые стороны 10 см. Вне треугольника дана точка, удаленная от всех его вершин на 26 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.
2. Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BM , перпендикулярная к его плоскости. Найти расстояние от точки M до плоскости ромба, если, $AB=4$, $\angle BAD=60^\circ$ и точка M удалена от прямой AD на расстояние, равное длине стороны ромба.
3. KO - перпендикуляр к плоскости α , KM и KP - наклонные к этой плоскости, OM и OP - проекции наклонных, причем сумма их длин равна 15 . Найдите расстояние от точки K до плоскости α , если $KM=15$, $KP=10\sqrt{3}$.
4. Через центр O квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр OF к плоскости квадрата. Вычислить угол между плоскостями BCF и $ABCD$, если $FB=5$, $BC=6$.

11 класс

Контрольная работа по теме «Производная».

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^3 - 2,5t^2 + 3t + 1$ (м).
 - а) Найдите её скорость в момент времени $t = 1$ с.
 - б) В какой момент времени ускорение будет равно $19 \frac{m}{c^2}$?
2. Найдите:
 - а) $f''(4)$, если $f(x) = \frac{32 - x^2 \sqrt{x}}{x^2}$,
 - б) $f'(0)$, если $f(x) = \frac{(e^x + 3x)^2}{\cos x}$;
 - в) $f'(1)$, если $f(x) = (1 + x^2) \cdot \text{arctg} x$
3. Найти абсциссы всех точек графика функции $y = \frac{1}{2} \sin 2x - \sin x$, касательные в которых параллельны прямой $y + x - 1 = 0$.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 7$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

Контрольная работа 2 по теме «Применение производной»

1. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = e^x - x$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на отрезке $[-2; 2]$.
3. Найдите экстремумы функции $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$.
4. Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

Контрольная работа по теме «Первообразная и интеграл».

1. Найдите ту первообразную функции $f(x) = 3x^2 + 2x$, график которой проходит через точку $M(-1; 81)$.
2. Найдите неопределённый интеграл:
 - 1) $\int (6x^2 + 4x - 2) dx$;
 - 2) $\int 5x\sqrt{x} dx$;
 - 3) $\int \left(\sin \frac{3x}{4} \cos \frac{x}{4} + \cos \frac{3x}{4} \sin \frac{x}{4} \right) dx$;
 - 4) $\int \sin \frac{x}{5} dx$;
 - 5) $\int e^{3x} dx$;
 - 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+5x}}$;
 - 7) $\int \sin^3 \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} dx$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $y = x^2 + 3$ и прямой $x = 2$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ и $x = \frac{1}{3}$.

Контрольная работа № 1 (на 20 мин)

1. Найдите координаты вектора \overrightarrow{AB} , если $A(5; -1; 3)$, $B(2; -2; 4)$.
2. Даны векторы $\vec{b}(3; 1; -2)$ и $\vec{c}(1; 4; -3)$. Найдите $|2\vec{b} - \vec{c}|$.
3. Изобразите систему координат $Oxyz$ и постройте точку $A(1; -2; -4)$. Найдите расстояния от этой точки до координатных плоскостей.

Контрольная работа № 2

1. Вычислите скалярное произведение векторов \vec{m} и \vec{n} , если
2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и BM , где M - середина ребра DD_1 .
3. При движении прямая b отображается на прямую b_1 , а плоскость β - на плоскость β_1 , и $b \parallel \beta_1$. Докажите, что $b_1 \parallel \beta$.

Контрольная работа № 3

1. Осевое сечение цилиндра - квадрат, площадь основания цилиндра равна $16\pi \text{ см}^2$. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен 120° . Найдите:
 - а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 30° ;
 - б) площадь боковой поверхности конуса.
3. Диаметр шара равен $2m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 45° к нему. Найдите длину линии пересечения сферы с этой плоскостью.

Контрольная работа № 4

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60° . Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30° . Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 45° . Найдите объем цилиндра.

Контрольная работа № 5

1. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол в 60° . Найдите отношение объемов конуса и шара.
2. Объем цилиндра равен 96π см³, площадь его осевого сечения 48 см². Найдите площадь сферы, описанной около цилиндра.

Контрольная работа

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h , а плоский угол при вершине пирамиды равен α . Найдите объем пирамиды.
2. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит параллелограмм $ABCD$, $BD=6$, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$. Плоскость сечения, проходящая через большие два ребра оснований, составляет с основанием угол в 30° . Найдите объем параллелепипеда.
3. Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности конуса равна 3π . Найдите объем конуса
4. В наклонной треугольной призме высота равна $10\sqrt{2}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 45° . Площади двух граней равны 100 и 200, а угол между ними 120° . Найдите объем призмы.

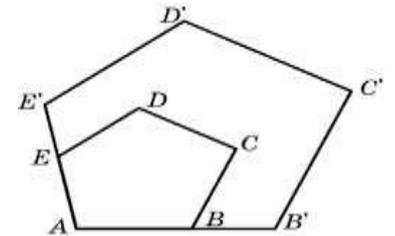
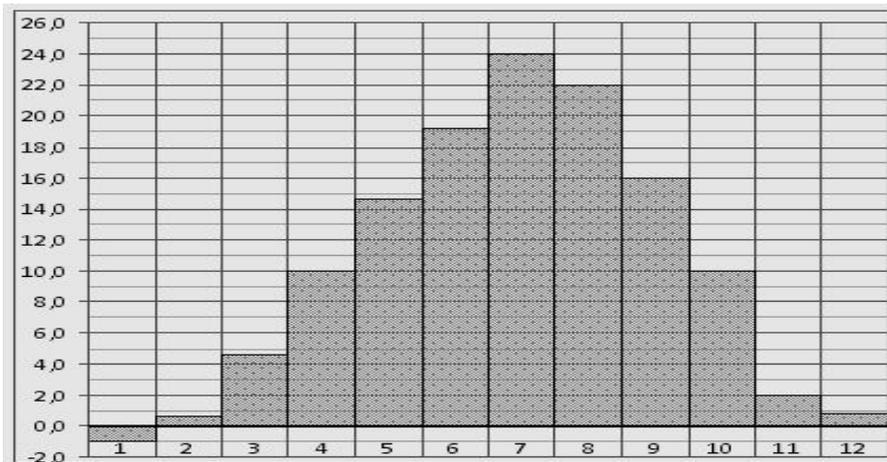
Контрольная работа

1. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра куба равна 1. Каждая из двух сфер одинакового радиуса $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ касается ребра AB основания и боковых ребер AA_1 и CC_1 , не принадлежащих одной грани. Найти расстояние между центрами этих сфер.
2. Дан куб с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, лежащая внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной V_1 . Определить радиус второй сферы.

Итоговая контрольная работа.

Часть 1

1. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 3%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Месячная плата за интернет составляет 350 рублей. Какую минимальную сумму положить в приемное устройство терминала, чтобы на счету фирмы, предоставляющей интернет-услуги, оказалась сумма, не меньшая 350 рублей?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура не превышала 14 градусов Цельсия.



3 Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3:5. Площадь меньшего многоугольника равна 144. Найдите площадь большего многоугольника.

4 Из множества натуральных чисел от 58 до 82 включительно наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 6?

5 Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}$.

6 В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, AC=3, $\sin A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите BH.

7 Прямая $y = 5x - 8$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 - 15x + c$. Найдите c.

8 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $ABFA_1$ правильной шестиугольной призмы $ADCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 12.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{175}}$.

10 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный

параметр, $\omega_p = 360c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на одну пятнадцатую. Ответ выразите в c^{-1} .

11 Дима, Андрей, Саша и Гоша учредили компанию с уставным капиталом 2000000 рублей. Дима внес 17% уставного капитала, Андрей - 360000 рублей, Саша — 0,2 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Гоша. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 500000 рублей причитается Гоше? Ответ дайте в рублях.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{168 - 22x - x^2}$.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{2 \cos x + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$. $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

14] Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M – середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM – равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

15] Решите неравенство
$$\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0.$$

16] Первая окружность с центром O вписанная в треугольник KLM , касается стороны KL в точке B , а основания ML – в точке A . Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой окружности равен 6 и $AK = 16$.

17] По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» - увеличивать эту сумму на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй и за третий годы. Найдите наименьшее значение n , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначального взноса.

18] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3a + 1)^2 + (y + 2a)^2 = a - 1 \\ 4x + 3y = a + 1 \end{cases} \quad \text{имеет более одного решения.}$$

19] Будем называть четырехзначное число *интересным*, если среди четырех цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трех других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырехзначных чисел, разность между которыми равна трем.

б) Найдутся ли два интересных четырехзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырехзначного числа.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Разработка урока по теме «Интегрирование «сложных» функций».

Автор – Коваленок И.Л.

Методическая цель урока

Интегрирование занимает важное место в математике и её применении в других областях знаний. При этом возникает необходимость интегрировать достаточно сложные выражения. В существующих учебниках разбираются только функции линейного аргумента, этого не достаточно для решения некоторых задач. Особые трудности табличного интегрирования сложных функций состоят в выборе промежуточного аргумента. *Попробуем найти алгоритм интегрирования «сложных» функций* (фактически он представляет собой в неявном виде метод замены переменной), *составить таблицу интегралов для «сложных» функций и научиться применять её для непосредственного интегрирования.* В процессе решения поставленной задачи повторяются формулы дифференцирования основных элементарных функций и способ нахождения производной сложной функции.

В ходе урока вырабатывается умение сопоставлять и сортировать данные, анализировать, делать обобщения, доказывать правильность выводов (индуктивный подход).

Ход урока

1. Повторение. Найти следующие интегралы:

1. $\int \frac{2x^2+3}{x} dx$, 2. $\int \frac{x-1}{2\sqrt{x}} dx$, 3. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$, 4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$, 5. $\int \left(\frac{2}{x^2+4} + \frac{4}{x^2-4} \right) dx$,
 6. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx$, 7. $\int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$, 8. $\int (2x+5)^{10} dx$. ???

2. Задание: Повторить определение неопределённого интеграла и первообразной функции и подобрать выражение для каждого из записанных интегралов.

1) $\int (2x+5)^{10} dx$,	1) $-2\sqrt{3-x} + C$,	$(-2\sqrt{3-x})' = -\frac{-1}{\sqrt{3-x}}$.
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$,	2) $-\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C$,	$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\right)' = -\frac{1}{8} \cdot \frac{-8x}{\sqrt{9-4x^2}}$.
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$,	3) $2e^{x/2} + C$,	$(2e^{x/2})' = 2e^{x/2} \cdot \frac{1}{2}$.
4) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-4x^2}}$,	4) $\ln(e^x+1) + C$,	$(\ln(e^x+1))' = \frac{e^x}{e^x+1}$.
5) $\int \sin 2x dx$,	5) $-\ln(2+\cos x) + C$,	$(-\ln(2+\cos x))' = -\frac{-\sin x}{2+\cos x}$.
6) $\int e^{x/2} dx$,	6) $-\ln(2+\cos^2 x) + C$,	$(-\ln(2+\cos^2 x))' = -\frac{-\sin 2x}{2+\cos x}$.
7) $\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$,	7) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$,	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)' = -\frac{-\sin x}{2+\cos^2 x}$.
8) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$,	8) $e^{\sqrt{x}} + C$,	$(e^{\sqrt{x}})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
9) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$,	9) $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$,	$\left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' = \sin 2x$.
10) $\int \frac{\sin x dx}{2+\cos x}$,	10) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C$,	$\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3}\right)' = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}$.
11) $\int \frac{\sin x dx}{2+\cos^2 x}$,	11) $\frac{(2x+5)^{11}}{22} + C$,	$\left(\frac{(2x+5)^{11}}{22}\right)' = \frac{1}{2} (2x+5)^{10} \cdot 2$.
12) $\int \frac{\sin 2x dx}{2+\cos^2 x}$,	12) $\operatorname{arctg} e^x + C$,	$(\operatorname{arctg} e^x)' = \frac{e^x}{(e^x)^2+1}$.

Итак, в каком случае можно проинтегрировать сложную функцию?

Очевидно, если её можно представить в виде $f(u) \cdot u'$, где $u = u(x)$.

3. Обобщая наш опыт, получим таблицу для интегрирования сложных функций аналогично тому, как мы это делали при выводе основных формул интегрирования.

4.

$F'(u(x)) = F'(u) \cdot u' = f(u) \cdot u'$	$\int f(u) \cdot u' dx = F(u(x)) + C$
1) $\left(\frac{u^{m+1}}{m+1}\right)' = u^m \cdot u', m \neq -1$	$\int u^m \cdot u' dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$
2) $(2\sqrt{u})' = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot u'$	$\int \frac{u' dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$

3) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{u} = \ln u + C$
4) $\left(\frac{a^u}{\ln a}\right)' = a^u \cdot u'$	$\int a^u \cdot u'dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5) $(e^u)' = e^u \cdot u'$	$\int e^u \cdot u'dx = e^u + C$
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$\int \cos u \cdot u'dx = \sin u + C$
7) $(-\cos u)' = \sin u \cdot u'$	$\int \sin u \cdot u'dx = -\cos u + C$
8) $(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C$
9) $(-\operatorname{ctgu})' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C$
10) $\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a}\right)' = \frac{1}{u^2 + a^2} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{u^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C \end{cases}$
11) $\left(\arcsin \frac{u}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{u}{a} + C \end{cases}$
12) $\left(\frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right \right)' = \frac{1}{u^2 - a^2} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
13) $\left(\ln u + \sqrt{u^2 + a} \right)' = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a}} \cdot u'$	$\int \frac{u'dx}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln u + \sqrt{u^2 + a} + C$

5. Попробуем применить эту таблицу для нахождения интегралов. При этом подынтегральную функцию удобно привести к такому виду, чтобы чётко выделялась функция $u(x)$; u' должно либо присутствовать в виде множителя перед dx , либо должна быть функция, отличающаяся от u' лишь **постоянным** множителем. Недостающий множитель можно легко добавить, не забыв его компенсировать. Компенсирующий множитель выносится за знак интеграла.

Задание: Найти следующие неопределённые интегралы:

- $\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^5 \cdot 3 dx = \left\{ \int u^5 \cdot u'dx = \frac{u^6}{6} + C \right\} = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^6}{6} + C = \frac{(3x+2)^6}{18} + C,$
- $\int \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \left\{ \int \cos u \cdot u'dx = \sin u + C \right\} = 2 \sin \frac{x}{2} + C,$
- $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x-5} = \left\{ \int \frac{u'dx}{u} = \ln|u| + C \right\} = \ln|x^2-3x-5| + C,$
- $\int \frac{x dx}{4x^2+9} = \frac{1}{8} \int \frac{8x dx}{4x^2+9} = \left\{ \int \frac{u'dx}{u} = \ln|u| + C \right\} = \frac{1}{8} \ln(4x^2+9) + C,$

$$5) \int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x)^2 + 3^2} = \left\{ \int \frac{u'dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C,$$

$$6) \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx = -\int e^{\cos x} \cdot (-\sin x) dx = \left\{ \int e^u \cdot u' dx = e^u + C \right\} = -e^{\cos x} + C,$$

$$7) \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C,$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot dx}{\sqrt{2^2 - (2x+1)^2}} = \left\{ \int \frac{u'dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \right\} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x+1}{2} + C,$$

$$9) \int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{4 + \sin 3x}} = \frac{1}{3} \int \frac{3 \cos 3x dx}{\sqrt{4 + \sin 3x}} = \left\{ \int \frac{u'dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \right\} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{4 + \sin 3x} + C = \frac{2}{3} \sqrt{4 + \sin 3x} + C$$

**Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей ИГУ г. Иркутска (МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска)**

Утверждено
приказом директора
МАОУ Лицея ИГУ г. Иркутска
от 30.04.2020 № 01-06-60/1

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
Курса «Геометрический практикум»**

10 - 11 классы

Срок реализации программы 2 года

Составители программы: Осипенко Л.А., учитель математики, кандидат
физико-математических наук, доцент

**г. Иркутск
2020 год**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа спецкурса «Геометрический практикум» отвечает требованиям к планируемому результату освоения основной образовательной программы среднего общего образования, реализующей ФГОС СО, с учетом особенностей организации образовательного процесса Лицея ИГУ.

В программу включены содержание, тематическое планирование, требования к математической подготовке учащихся к концу десятого и одиннадцатого классов, а также оценочные материалы (приложение 1) и методические материалы (приложение 2).

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс			11 класс			Всего		
	Естественно-математический, Экономико-математический	Информационно-математический, Физико-математический (с углубленным изучением математики)	Лингво-математический	Естественно-математический, Экономико-математический	Информационно-математический, Физико-математический (с углубленным изучением математики)	Лингво-математический	Естественно-математический, Экономико-математический	Информационно-математический, Физико-математический (с углубленным изучением математики)	Лингво-математический
Количество учебных недель	35	35	---	34	34	34			
Количество часов в неделю	1 ч/нед	0,5 ч/нед		1 ч/нед	1 ч/нед	1 ч/нед			
Количество часов в год	35	17		34	34	34	69	51	34

Уровень подготовки учащихся - углубленный.

Место предмета в учебном плане – часть, формируемая участниками образовательных отношений (часы на занятия, обеспечивающие различные интересы и потребности обучающихся).

Дополнительная литература:

11. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. - М.: МЦНМО, 2019.
12. Куланин Е.Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике. - Айрис-Пресс, 2003.
13. Осипенко Л.А., Стаевичуте Е.Э., Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие. – Иркутск, 2010. – 48 с.: ил. – (Серия «Университетский лицей»).
14. Шарьгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. - М.: Дрофа, 1999.

Литература для учителя:

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень). - М.: МЦНМО, 2019.

2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие.—5-е изд., испр. и доп.— М.: МЦНМО: ОАО .Московские учебники., 2006

Содержание программы по курсу «Геометрический практикум» в 10 естественно-математическом, экономико-математическом классах /информационно-математическом, математическом, физико-математическом классах

- I. Треугольники (16/8 часов).** Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема косинусов и ее следствие. Медианы треугольника и их свойства. Удвоение медианы. Биссектриса треугольника. Вычисление биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам. Площадь треугольника. Метод площадей. Вычисление высоты треугольника. Свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Теорема синусов и ее следствие. Окружности, связанные с треугольниками.
- II. Четырехугольники (8/9).** Параллелограмм. Ромб. Свойства и признаки. Трапеция и ее свойства. Метод дополнительных построений. Описанные четырехугольники. Вписанные четырехугольники. Метод вспомогательной окружности. Теорема Птолея.
- III. Окружности (11/0).** Касательная к окружности. Касающиеся окружности. Пересекающиеся окружности. Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность. Пропорциональные отрезки в круге.

Содержание программы по курсу «Геометрический практикум» в 11 информационно-математическом, лингво-математическом, экономико-математическом и физико-математическом классах

- I. Пропорциональные отрезки и подобные треугольники (9 часов).** Отношение отрезков. Применение теоремы Фалеса. Теорема Менелая. Отношение площадей. Пропорциональные отрезки в круге. Вспомогательные подобные треугольники
- II. Применение метода координат для решения задач планиметрии (7 часов).** Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Решение задач из курса планиметрии методом координат
- III. Решение задач на доказательство и вычисление (18 часов).** Особые линии и точки в треугольнике. Окружности, связанные с треугольниками. Вписанные и описанные четырехугольники. Касающиеся и пересекающиеся окружности. Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность.

Тематическое планирование

10 естественно-математическом и экономико-экономическом классах

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Треугольники	16	
1	Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема косинусов и ее следствие.	1	
2	Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема косинусов и ее следствие.	1	
3	Медианы треугольника и их свойства. Удвоение медианы.	1	
4	Медианы треугольника и их свойства. Удвоение медианы.	1	
5	Биссектриса треугольника. Вычисление биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам.	1	

6	Биссектриса треугольника. Вычисление биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам.	1	
7	Площадь треугольника. Метод площадей.	1	
8	Вычисление высоты треугольника. Свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.	1	
9	Вычисление высоты треугольника. Свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.	1	
10	Теорема синусов и ее следствие.	1	
11	Окружности, связанные с треугольниками. Описанная окружность.	1	
12	Окружности, связанные с треугольниками. Вписанная окружность.	1	
13	Окружности, связанные с треугольниками. Внеписанная окружность.	1	
14	Окружности, связанные с треугольниками. Внеписанная окружность.	1	
15	Контрольная работа №1		1
16	Работа над ошибками.	1	
	Четырехугольники	8	
17	Параллелограмм. Ромб. Свойства и признаки.	1	
18	Параллелограмм. Ромб. Свойства и признаки.	1	
19	Трапеция и ее свойства.	1	
20	Трапеция и ее свойства. Метод дополнительных построений.	1	
21	Описанные четырехугольники.	1	
22	Вписанные четырехугольники. Метод вспомогательной окружности.	1	
23	Вписанные четырехугольники. Метод вспомогательной окружности.	1	
24	Вписанные четырехугольники. Теорема Птолемея.	1	
	Окружности	10	
25	Касательная к окружности.	1	
26	Касающиеся окружности.	1	
27	Пересекающиеся окружности.	1	
28	Пересекающиеся окружности.	1	
29	Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность.	1	
30	Пропорциональные отрезки в круге.	1	
31	Пропорциональные отрезки в круге.	1	
32	Контрольная работа №2		1
33	Работа над ошибками	1	
34	Обобщение знаний по курсу	1	

35	Итоговое занятие.	1	
----	-------------------	---	--

10 информационно-математическом и физико-математическом классах, классе с углубленным изучением математики

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Треугольники	8	
1	Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема косинусов и ее следствие.	1	
2	Медианы треугольника и их свойства. Удвоение медианы.	1	
3	Биссектриса треугольника. Вычисление биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам.	1	
4	Биссектриса треугольника. Вычисление биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам.	1	
5	Вычисление высоты треугольника. Свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу	1	
6	Окружности, связанные с треугольниками. Описанная окружность	1	
7	Окружности, связанные с треугольниками. Вписанная окружность.	1	
8	Окружности, связанные с треугольниками. Внеписанная окружность.	1	
	Четырехугольники	9	
9	Параллелограмм. Ромб. Свойства и признаки.	1	
10	Трапеция и ее свойства.	1	
11	Трапеция и ее свойства. Метод дополнительных построений.	1	
12	Описанные четырехугольники.	1	
13	Вписанные четырехугольники. Метод вспомогательной окружности.	1	
14	Вписанные четырехугольники. Теорема Птолемея.	1	
15	Решение задач.	1	
16	Контрольная работа		1
17	Итоговое занятие	7	

11 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Пропорциональные отрезки и подобные треугольники	9	
1	Отношение отрезков. Применение теоремы Фалеса.	1	
2	Отношение отрезков. Теорема Менелая.	1	
3	Отношение отрезков. Теорема Менелая.	1	
4	Отношение площадей.	1	
5	Отношение площадей.	1	
6	Пропорциональные отрезки в круге.	1	
7	Пропорциональные отрезки в круге.	1	
8	Вспомогательные подобные треугольники	1	
9	Вспомогательные подобные треугольники	1	
	Применение метода координат для решения задач планиметрии	7	
10	Различные виды уравнений прямой на плоскости.	1	
11	Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.	1	
12	Решение задач из курса планиметрии методом координат	1	
13	Решение задач из курса планиметрии методом координат	1	
14	Решение задач из курса планиметрии методом координат	1	
15	Контрольная работа №1		1
16	Работа над ошибками	1	
	Решение задач на доказательство и вычисление	18	
17	Особые линии и точки в треугольнике	1	
18	Особые линии и точки в треугольнике	1	
19	Особые линии и точки в треугольнике	1	
20	Окружности, связанные с треугольниками.	1	
21	Окружности, связанные с треугольниками.	1	
22	Окружности, связанные с треугольниками.	1	
23	Вписанные и описанные четырехугольники.	1	
24	Вписанные и описанные четырехугольники.	1	
25	Вписанные и описанные четырехугольники.	1	
26	Касающиеся и пересекающиеся окружности.	1	
27	Касающиеся и пересекающиеся окружности.	1	
28	Касающиеся и пересекающиеся окружности.	1	
29	Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружностью	1	

30	Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность.	1	
31	Решение задач.	1	
32	Контрольная работа №2		1
33	Решение задач ЕГЭ	1	
34	Решение задач ЕГЭ	1	

Планируемые результаты

10 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах фигур, проводить в несложных случаях классификацию фигур по различным основаниям;
- исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;
- решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Учащиеся получают возможность научиться:

- свободно оперировать геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы фигур.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;

- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения геометрических фигур, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах фигур, проводить в не-сложных случаях классификацию фигур по различным основаниям;
- исследовать чертежи, включая комбинации фигур, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах;

- решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения;
- применять метод координат при решении задач

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат

Выпускник получит возможность научиться:

- свободно оперировать геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках геометрических фигур и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы фигур.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Оценочные материалы

10 класс

Контрольная работа №1

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе, пополам.
2. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.
3. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Найдите радиус окружности, касающейся большей стороны и продолжений двух других его сторон (внеписанная окружность)

Контрольная работа №2

1. Стороны параллелограмма равны a и b ($a \neq b$). Найдите диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис углов параллелограмма.
2. В равнобедренную трапецию ABCD ($AD \parallel BC$) вписана окружность с центром в точке O, CH – высота трапеции
 - А) Докажите, что треугольник АВН – равнобедренный.
 - В) Найдите основания трапеции, если боковая сторона трапеции равна 2, а угол ВОС равен 60 градусов (BC – меньшее основание).

11 класс

Контрольная работа №1

1. В треугольнике ABC точка E принадлежит медиане BM, причем $BE = 3EM$. Прямая AE пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников AKC и ABC.
2. Решите задачу методом координат: На катете BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C и углом 30 градусов при вершине A вне треугольника построен равносторонний треугольник BCD. Прямая AD пересекает сторону BC в точке K. А) Докажите, что $CK:KB = 1:2$. В) Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно CD, пересекает гипотенузу AB в точке M. Найдите отношение AM:MB.

Контрольная работа №2

1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны. а) Докажите, что $CE = 2AE$. б) Найдите стороны треугольника ABC , если $BE = AD = 8$.
2. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трёх сторон параллелограмма каждая. а) Докажите, что одна из сторон параллелограмма видна из центра одной из окружностей под прямым углом. б) Найдите площадь параллелограмма, если радиус одной из окружностей равен 2, а один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равен 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

1. Внеписанная окружность. Опорные задачи

Внеписанной окружностью называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Центром внеписанной окружности является точка пересечения биссектрис внешних углов и биссектрисы внутреннего угла треугольника при третьей вершине.

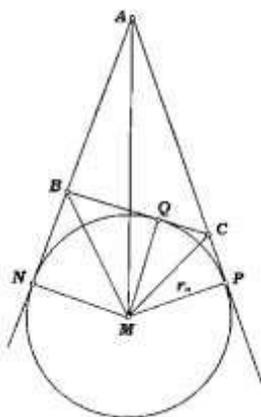


Рис. 1

Задача 1. Вычислите радиус внеписанной окружности, если известны площадь, полупериметр и сторона треугольника, которой касается эта окружность.

Решение. Пусть дан треугольник ABC , где $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Точка M – центр внеписанной окружности, касающейся стороны a . Обозначим радиус внеписанной окружности через r_a . Чтобы вычислить радиус внеписанной окружности рассмотрим площади треугольников ABC , ABM , ACM , BCM (рис.1). Тогда

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABM} + S_{ACM} - S_{BCM} = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \\ &= \frac{r_a(b+c-a)}{2} = r_a(p-a), \end{aligned}$$

где p – полупериметр треугольника ABC . Следовательно,

$$r_a = \frac{S}{p-a}. \quad (1)$$

Аналогично доказывается, что

$$r_b = \frac{S}{p-b}; \quad r_c = \frac{S}{p-c}. \quad (1')$$

Задача 2. Докажите, что отрезок от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности, расположенной на продолжении стороны, равен полупериметру.

Решение. Пусть дан треугольник ABC , где $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$, N и P – точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон AB и AC (рис. 1). Тогда $AN=AB+BN=c+BQ$; $AP=AC+CP=b+QC$ ($BN=BQ$, $CP=QC$, как отрезки касательных, проведенных из одной точки). Так как $AN=AP$, то $2AN=b+c+BQ+QC=b+c+a=2p$. Следовательно, $AN=p$. Что и требовалось доказать.

Задача 3. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K , а вневписанная – в точке L . Докажите, что $CK=BL=(a+b-c)/2$, где a, b, c – длины сторон треугольника.

Решение. Пусть M и N – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC (рис. 2).

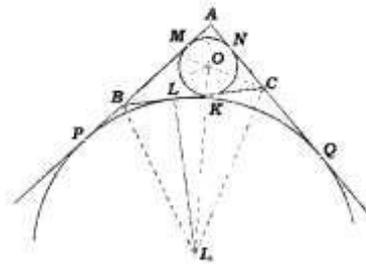


Рис. 2

Тогда $BK+AN=BM+AM=AB$, поэтому $CK+CN=a+b-c$. Пусть P и Q – точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон AB и AC (рис. 2). Тогда $AP=AB+BP=AB+BL$ и $AQ=AC+CQ=AC+CL$. Поэтому $AP+AQ=a+b+c$. Следовательно, $BL=BP=AP-AB=(a+b-c)/2$.

Точка Нагеля. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания соответственных вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке, называемой точкой Нагеля (рис.3).

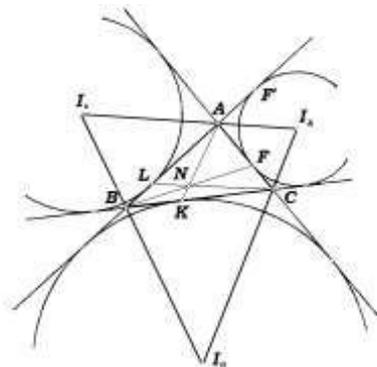


Рис. 3

Доказательство. Так как $AF=AF'=BF'-BA=p-c$, $CK=p-b$, $BL=p-a$, $FC=p-a$, $KB=p-c$, $LA=p-b$, то $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1$ (по теореме Чебы). Следовательно, прямые AK , BF и CL пересекаются в одной точке.

Задача 4. Доказать, что $AP=BR$, $AN=CS$ и $OB=CQ$, где O, R, P, N, Q, S – точки касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон треугольника ABC (рис. 4).

Решение.

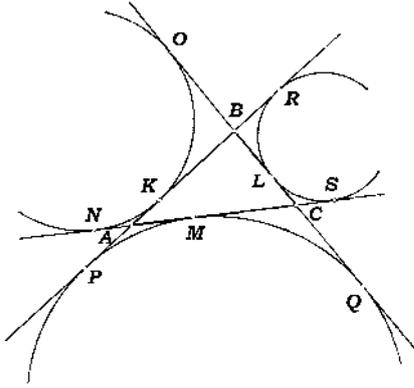


Рис. 4

Заметим, что $NA=AK$, $AP=AM$, $CM=CQ$, $CS=CL$, $BL=BR$, $BK=OB$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки). $PA+AK+KB=BL+LC+CQ$ и $AK+KB+BR=AM+MC+CS$
 Или $AP+AK+KB=BL+LC+CQ$ и $AK+KB+BR=AM+CL+CQ$.
 Вычтем из первого равенства второе. Получим: $AP-BR=BL-AM$ или $AP-BR=BR-AP$. Следовательно, $AP=BR$. Аналогично доказывается, что $AN=CS$ и $OB=CQ$.

2. Задачи по теме «Пропорциональные отрезки в круге»

1. Через точку A , удалённую на расстояние, равное 7, от центра окружности радиуса 11, проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые хорда делится точкой A .
2. Радиусы двух concentric окружностей относятся как 1 : 2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.
3. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d . Докажите, что для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M , произведение $AM \cdot MB$ одно и то же. Чему оно равно?
4. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d . Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B , произведение $AM \cdot MB$ одно и то же. Чему оно равно?
5. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E . Найдите величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE .
6. Из точки A , лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.
7. В круге проведены две хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M , K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD . Найдите отрезки BK и KD , если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как 1 : 4.
8. Диагональ AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K . Найдите KC , если $BC = 4$ и $AK = 6$.
9. Продолжение медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A пересекает описанную окружность в точке D . Найдите BC , если $AC = DC = 1$.
10. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8, 10 проведена касательная к описанной окружности этого треугольника. Найдите отрезок касательной,

заклѳченнѳй между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.

11 класс.

Задачи по теме «**Применение метода координат для решения задач планиметрии**»

1. Равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 2 см имеет острый угол 45° . Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание и за ось Oy — ось симметрии трапеции.
2. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 см и 6 см, приняв большую диагональ за ось Ox и меньшую — за ось Oy .
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-4; 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью 6.
4. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y = 4 - 2x$.
5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.
6. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $5y = x + 6$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.
7. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Найти длину CN , если длины катетов равны 1 и 4.
8. На катете BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C и углом 30 градусов при вершине A вне треугольника построен равносторонний треугольник BCE . Прямая AE пересекает сторону BC в точке K . А) Докажите, что $CK:KB=1:2$. В) Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно CE , пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите отношение $AM:MB$.
9. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с углом 30 градусов при вершине B вне треугольника построен равносторонний треугольник ABE . Прямая CE пересекает сторону AB в точке K . А) Докажите, что $AK:KB=1:2$. В) Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно AE , пересекает катет BC в точке M . Найдите отношение $CM:MB$.
10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD , равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD .

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
Курса «Дискретная математика»**

10 - 11 классы

Срок реализации программы 2 года

Составитель программы: Кузьмин О.В., доктор физ.-мат. наук,
профессор, Заслуженный учитель РФ,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

**г. Иркутск
2020 год**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования по математике с учетом особенностей организации образовательного процесса Лицея ИГУ.

В программу включены содержание, тематическое планирование, требования к математической подготовке учащихся к концу десятого и одиннадцатого классов, а также оценочные материалы (приложение 1) и методические материалы (приложения 2).

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс	11 класс	Всего
Количество учебных недель	35	34	69
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	35	34	69

Уровень подготовки учащихся – углубленный.

Место предмета в учебном плане – часть, формируемая участниками образовательных отношений (отдельный обязательный учебный предмет).

Дополнительная литература:

1. Афанасьев В. В., Суворова М. А. Школьникам о вероятности в играх. Введение в теорию вероятностей для учащихся 8-11 кл. – Ярославль: Академия развития, 2006. – 192 с.
2. Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа С6. – Ростов н/Д: Феникс, 2014. – 222 с.
3. Буфеев С. В. Коллекция задач по арифметике целых чисел. Олимпиадные задачи и задания профильного ЕГЭ по математике. – М.: URSS, 2018. – 272 с.
4. Пукас Ю. О. Решаем задачи С6 по математике. Советы практика. – М.: Илекса, 2013. – 80 с.
5. Степанова Л. Л., Жмулева Л. В., Деза Е.И. Практикум по элементарной математике. Арифметика. – М.: МЦНМО. – 2008. – 207 с.
6. Шахмейстер А. Х. Комбинаторика. Статистика. Вероятность. – СПб.: Петроглиф: Виктория плюс; М.: МЦНМО, 2018. – 296 с.

Литература для учителя:

3. Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. 5-11 кл.: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2008. – 286 с.
4. Вольфсон Г.И. и др. ЕГЭ 2019. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / под ред. И. В. Яценко. – М.: МЦНМО. – 2019. – 112 с.
5. Кузьмин О.В. Перечислительная комбинаторика: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2005. – 112 с.
6. Тюрин Ю. Н. и др. Математика. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учеб. пособие для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений – М.: МЦНМО, 2014. – 248 с.
7. Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО: МИОО, 2008. – 56 с.
8. Шень А. Простые и составные числа. М.: МЦНМО, 2005.

Содержание программы по курсу «Дискретная математика» в 10-11 классах.

10 классы

- IV. Элементы перечислительной комбинаторики (8 часов).** Основные правила комбинаторики.
Соединения. Подмножества конечных множеств. Соотношения для числа сочетаний, размещений и перестановок без повторений.
Подмножества конечных мультимножеств. Соотношения для числа сочетаний, размещений и перестановок с повторениями. Разбиения и число разбиений.
- V. Элементы теории вероятностей и статистики (27 часов).** Стохастическое восприятие мира. Предмет теории вероятностей и математической статистики. Случайные эксперименты. Понятие стохастической модели.
События и их вероятности. Случайные события и операции над ними. Алгебра событий.
Классическое определение вероятности. Применение комбинаторики к подсчету вероятности. Геометрическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности. Независимость случайных величин. Формулы полной вероятности и Байеса.
Испытания Бернулли. Формула Бернулли.
Случайные величины. Дискретные случайные величины и законы их распределения. Многоугольник распределения. Понятие непрерывной случайной величины.
Числовые характеристики случайных величин. Понятие моментов случайных величин. Основные свойства математического ожидания и дисперсии.
Неравенство Чебышева и закон больших чисел. Теоремы Чебышёва и Бернулли.
Основные понятия математической статистики. Выборка. Статистические характеристики выборки. Среднее значение, мода, медиана и размах выборки.

11 классы

- I. Комбинаторика и арифметика целых чисел (26 часов).** Отношение делимости. Признаки делимости. Десятичная запись числа.
Свойства делимости. Разложение на множители. Простые и составные числа. Деление с остатком. Арифметика остатков. Делители числа. Взаимно-простые числа.
НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Основная теорема арифметики.
Уравнения в целых числах. Линейные диофантовы уравнения. Диофантовы уравнения второго и более высокого порядка. Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Показательные уравнения. Уравнения в простых числах. Уравнения смешанного типа. Уравнения с целой и дробной частями числа.
Неравенства в целых числах. Организация перебора. Применение метода математической индукции. Использование области определения. Использование монотонности. Использование ограниченности. Использование графических иллюстраций.
Неравенства и оценки в задачах теории чисел. Среднее арифметическое. Неравенство о средних.
Последовательности и ряды. Суммы и произведения. Рекуррентные соотношения. Прогрессии. Инварианты.
Текстовые задачи.
- II. Элементы теории вероятностей (8 часов).** Классическое определение вероятности. Применение комбинаторики к подсчету вероятностей случайных событий.
Теоремы сложения и умножения вероятностей.
Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса.
Последовательные испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

Тематическое планирование

10 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Элементы перечислительной комбинаторики	8	
1	Основные правила комбинаторики. Соединения.	1	
2	Подмножества конечных множеств. Соотношения для числа сочетаний без повторений.	1	
3	Соотношения для числа размещений и перестановок без повторений.	1	
4	Подмножества конечных мультимножеств. Соотношения для числа сочетаний с повторениями.	1	
5	Соотношения для числа размещений и перестановок с повторениями и разбиений.	1	
6	Решение задач по теме «Соединения»	1	
7	Контрольная работа № 1. Соединения.		1
8	Решение задач по теме «Соединения»	1	
	Элементы теории вероятностей и статистики	26	
9	Стохастическое восприятие мира. Предмет теории вероятностей и математической статистики. Случайные эксперименты. Понятие стохастической модели.	1	
10	События и их вероятности. Случайные события и операции над ними. Алгебра событий.	1	
11	Классическое определение вероятности. Применение комбинаторики к подсчету вероятности.	1	
12	Геометрическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	1	
13	Условные вероятности. Независимость случайных величин.	1	
14	Формулы полной вероятности и Байеса.	1	
15	Испытания Бернулли. Формула Бернулли.	1	
16	Решение задач по теме «Случайные события»	1	
17	Контрольная работа № 2. Случайные события.		1
18	Решение задач по теме «Случайные события»	1	
19	Случайные величины. Дискретные случайные величины и законы их распределения.	1	
20	Многоугольник распределения.	1	
21	Понятие непрерывной случайной величины.	1	
22	Числовые характеристики случайных величин.	1	
23	Математическое ожидание и его основные свойства.	1	
24	Дисперсия. Основные свойства дисперсии	1	
25	Понятие моментов случайных величин.	1	
26, 27	Неравенство Чебышёва.	2	
28	Закон больших чисел. Теорема Чебышёва.	1	
29	Теорема Бернулли.	1	

30	Контрольная работа № 3. Случайные величины		1
31	Решение задач по теме «Случайные величины»	1	
32	Основные понятия математической статистики. Выборка. Статистические характеристики выборки.	1	
33	Среднее значение, мода, медиана и размах выборки.	1	
34, 35	Решение задач ЕГЭ.	2	

11 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Комбинаторика и арифметика целых чисел	26	
1	Отношение делимости. Признаки делимости. Десятичная запись числа.	1	
2	Свойства делимости. Разложение на множители. Простые и составные числа.	1	
3	Деление с остатком. Арифметика остатков. Делители числа. Взаимно-простые числа.	1	
4	НОД и НОК. Алгоритм Евклида.	1	
5	Основная теорема арифметики.	1	
6	Уравнения в целых числах. Линейные диофантовы уравнения.	1	
7	Диофантовы уравнения второго и более высокого порядка.	1	
8	Контрольная работа № 1. Делимость.		1
9	Решение задач по теме «Делимость»	1	
10	Рациональные и иррациональные уравнения	1	
11	Показательные уравнения. Уравнения в простых числах.	1	
12	Уравнения смешанного типа.	1	
13	Уравнения с целой и дробной частями числа.	1	
14	Неравенства в целых числах. Организация перебора. Применение метода математической индукции.	1	
15	Использование области определения и монотонности.	1	
16	Ограниченность. Графические методы.	1	
17	Неравенства и оценки в задачах теории чисел.	1	
18	Среднее арифметическое. Неравенство о средних.	1	
19	Последовательности и ряды.	1	
20	Суммы и произведения.	1	
21	Рекуррентные соотношения.	1	
22	Прогрессии.	1	
23	Инварианты.	1	
24	Текстовые задачи.	1	
25	Контрольная работа № 2. Решение задачи 19 ЕГЭ		1

26	Решение задач по теме «Задача 19 ЕГЭ»	1	
	Элементы теории вероятностей	8	
27	Применение комбинаторики к подсчету вероятностей случайных событий	1	
28	Теоремы сложения и умножения вероятностей.	1	
29	Условные вероятности. Формула полной вероятности.	1	
30	Формула Байеса.	1	
31	Последовательные испытания. Формула Бернулли.	1	
32	Решение задач по теме «Вероятности случайных событий»	1	
33	Контрольная работа № 3. Вероятности случайных событий		1
34	Решение задач по теме «Вероятности случайных событий»	1	

Планируемые результаты

10 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- владеть комбинаторно-логическими и стохастическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения комбинаторных конфигураций, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций в и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию комбинаторных объектов по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные рассуждения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и теории вероятностей для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения;
- применять вероятностные и статистические методы при решении задач

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием вероятностных и статистических характеристик математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Учащиеся получат возможность научиться:

- свободно оперировать вероятностными и статистическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

– осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- владеть комбинаторно-логическими и стохастическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать определения комбинаторных конфигураций, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию комбинаторных объектов по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и теории вероятностей для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения;
- применять вероятностные и статистические методы при решении задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

составлять с использованием вероятностных и статистических математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Выпускник получит возможность научиться:

- свободно оперировать вероятностными и статистическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Оценочные материалы

10 класс

Контрольная работа № 1

1. Состоялся шахматный турнир, в котором приняли участие несколько шахматистов, причем каждый из них сыграл с остальными по одной партии. Всего состоялось 45 партий. Сколько было шахматистов?
2. В кондитерской имеется 5 видов пирожных. Сколько различных наборов по 4 пирожных можно составить? (Наборы, отличающиеся лишь расположением пирожных, считаются одинаковыми.)
3. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы четные места были заняты согласными буквами?

Контрольная работа № 2

1. Геометрическое определение вероятности. Условные вероятности. Формула Бернулли.
2. В ящике имеется 9 белых и 6 черных шаров. Наудачу вынимают 3 шара. Какой состав шаров по цвету наиболее вероятно извлечь?
3. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в пирамиду.

11 класс

Самостоятельная работа

1. Делится ли число 3145677891 на 11?
2. Какую цифру можно поставить вместо звездочки, если известно, что число $314159*6$ кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)
3. Найдите последнюю цифру числа 13^{2013} .
4. При делении числа 518 с остатком получилось неполное частное 172. Найдите все возможные значения делителя и остатка.

Контрольная работа № 1

1. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?
2. Число a даёт при делении на 8 остаток 5. Число b при делении на 16 даёт остаток 11. Найдите остаток от деления $a + b$ на 8.
3. Могут ли две последние цифры десятичной записи квадрата натурального числа быть нечётными?
4. Найдите наименьшее общее кратное чисел $2011!$ и $2009! + 2010!$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

1. Применение комбинаторики к подсчёту вероятностей

Многие задачи на подсчёт вероятностей можно свести к так называемой схеме случайного выбора. Здесь, мы рассматриваем два основных варианта этой схемы: *выбор с возвращением* и *выбор без возвращения*.

1. Выбор с возвращением. Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - некоторое множество элементов. Представим себе, в некотором ящике собрано n различных предметов, которые обозначены элементами a_1, a_2, \dots, a_n . Из ящика наугад извлекается один из предметов, регистрируется, затем возвращается обратно в ящик. Если осуществить t раз таких действий, то получим некоторую *строку* длиной t , составленную из элементов множества $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Полученная строка называется *выборкой объёма t* из множества M . Количество различных выборок объёма t в соответствии с правилом произведения равно n^t .

Описанную процедуру принято называть «случайным выбором с возвращением». Здесь, слово «случайный» означает нечто большее, нежели просто тот факт, что состав выборки заранее предсказать невозможно. Мы условимся вкладывать в это слово следующий смысл: *все n^t выборок равновероятны*. Другими словами, вероятность появления любой конкретной выборки (как случайное событие) равна

$$P(A) = \frac{1}{n^m}$$

К схеме случайного выбора можно свести большое количество опытов (испытаний). Например, подбрасывание монеты можно интерпретировать как случайный выбор одного элемента из двухэлементного множества $X = \{\text{герб}, \text{цифра}\}$. Вместо двукратного бросания игральной кости можно рассматривать случайный выбор с возвращением двух элементов из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Выяснение дней рождения m случайных прохожих можно заменить случайным выбором с возвращением m элементов из множества $X = \{1, 2, 3, \dots, 356\}$ и так далее.

2. Выбор без возвращения. В этом случае выбранный предмет из ящика не возвращается обратно в ящик, и следующее извлечение производится из оставшегося числа (меньшего числа) предметов. После m раз извлечений получаем строку длиной m без повторов. Количество таких строк, равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Случайный характер выбора строки понимается, как и выше, в том смысле, что все выборки данной длины (как случайное событие) имеют одну и ту же вероятность равную

$$P(A) = \frac{1}{A_n^m} = \frac{(n-m)!}{n!}$$

Пример 1. Пусть из совокупности n предметов извлекаются с возвращением m предметов. Найти вероятность того, что все предметы, составляющие выборку (событие A), окажутся различными.

Решение. В данном случае количество всех элементарных исходов опыта равно n^m , а число исходов, благоприятных для события A равно A_n^m . Следовательно,

$$P(A) = \frac{A_n^m}{n^m} = \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad (1)$$

Пример 2. (Задача о днях рождения). В некотором месте (например, в каком-нибудь театре, в студенческой аудитории и т.д.) случайно собралось m человек. Какова вероятность того, что, хотя бы у двух из них совпадают дни рождения?

Решение. Как уже было отмечено (см. пункт 1.) выяснения дней рождения у m случайно собравшихся лиц можно заменить случайным выбором с возвращением m элементов из множества $X = \{1, 2, 3, \dots, 356\}$. Нам необходимо найти вероятность события B – совпадения дней рождения у каких-либо двух лиц собравшихся. Здесь, удобно воспользоваться равенством $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, где \bar{B} – противоположное событие к событию B , заключающее в том, что в том, что все дни рождения различны. По формуле (1) для $n = 365$ получим:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (m - 1))}{365^m} \quad (2)$$

Найденная формула естественно, является функцией натурального аргумента m - число собравшихся людей в указанном месте. Подсчитаем для нескольких значений m :

m	5	10	22	23	30	60
$P(B)$	0,027	0,117	0,476	0,507	0,706	0,994

Расчеты проведены до третьего знака после запятой. Из таблицы видно, что если число собравшихся всего лишь 23 человека, то уже и тогда имеется более 50% шансов на то, что по крайней мере, у двоих из них дни рождения совпадут!

Пример 3. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза (событие A)?

Решение. Число всех строк длиной 10 из элементов множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ равно 6^{10} . Благоприятными случаями для события A будут строки, в которых элементы 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза, т.е. строки, имеющие состав (2, 3, 1, 1, 1, 2).

Количество таких строк равно:

$$\frac{(2+3+1+1+1+2)!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{10!}{24} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6^{10}} = \frac{700}{6^7} = 0,002 \dots$$

Пример 4. Слово «каре́та», составленное из шести «букв – кубиков», рассыпалось на отдельные буквы, которые затем собраны и положены в коробку. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой и расставляют их друг за другом (слева на право). Какова вероятность получения при таком действии слово «ракета»?

Решение. В этом примере отсутствует схема случайного выбора в прежнем понимании, так как буквы, сложенные в коробке, не все различны (две одинаковых буквы «а»). Представим себе, что одинаковые буквы (в данном случае «а, а») индивидуализированны с помощью знаков 1, 2 (превратились в a_1, a_2). Тогда число всевозможных выборов без возвращения будет $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$. Среди них благоприятными для слова «ракета» будет 2! выборов (число перестановок букв a_1, a_2).

Следовательно,

$$P(A) = \frac{2!}{6!} = \frac{2}{720} = \frac{1}{360} \approx 0,00278$$

Если исходную задачу решить непосредственно по смыслу, например, для случая слово «ракета», то достаточно ограничиться перестановками трёх первых букв. Число перестановок всего будет $3! = 6$. Таким образом, вероятность достижения цели будет равна $1/6$. Этот пример показывает, что наши умственные (наглядные) возможности повышают наш «шанс» для решения задач.

2. Задачи по теме «Подмножества конечных множеств. Сочетания»

1. В классе 40% мальчиков. Математический кружок посещают 40% учеников, при этом 40% участников математического кружка составляют девочки. Какая часть мальчиков посещает математический кружок?
2. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, ее не решивших. Кого в классе больше – решивших задачу или девочек?
3. 25 лицеистов, встретившись перед уроком дискретной математики, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
4. Сколько диагоналей имеется в выпуклом n -угольнике?
5. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не расположены на одной прямой; сколько имеется треугольников с вершинами в этих точках?
6. На собеседовании предлагается тест из 10 вопросов. Известно, что на половину из них следует ответить «да», а на вторую половину – «нет». Сколькими способами можно ответить на вопросы теста при данном условии?
7. В турнире по игре в «крестики-нолики» на первенство Лицея ИГУ Ваня С. и Сережа И. сыграли одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Остальные участники доиграли турнир до конца. Всего было сыграно 28 партий. Играли ли Ваня и Сережа в этом турнире между собой.
8. Шестеро ребят во дворе большого дома часто играли в лапту «трое на трое». Однажды один из мальчиков уехал, и наши друзья остались впятером. Стали играть вдвоем против троих. А чтобы никому не было обидно, стали составлять команды всеми возможными способами. Сколько различных команд по три участника и сколько – по два участника можно составить из пяти человек?
9. В первой подгруппе 10 физико-математического класса Лицея ИГУ 12 человек (включая старосту, Володю Ш.). Из них решено выбрать пять человек – делегацию в лицей № 2. Сколькими способами это можно сделать?
10. Докажите, что

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$,

б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

11 класс

1. Основная теорема арифметики

Пусть дано число 360. На какое наименьшее простое число оно делится? Очевидно, на 2: $360 = 2 \cdot 180$. На какое наименьшее простое число делится 180? Тоже на 2: $180 = 2 \cdot 90$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 90$. На какое наименьшее простое число делится 90? Опять на 2: $90 = 2 \cdot 45$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45$. На какое наименьшее простое число делится 45? На 3: $45 = 3 \cdot 15$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15$. Наконец, $15 = 3 \cdot 5$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, и на этом начатый нами процесс останавливается: все получившиеся множители являются простыми.

Точно такую же процедуру можно проделать и для любого другого числа. Это утверждение есть знаменитая *основная теорема арифметики*.

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число (кроме единицы) можно представить в виде произведения простых множителей, и притом единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Такое произведение называется *разложением на простые множители* или *каноническим разложением*. Выше было получено каноническое разложение числа 360:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

или, как это обычно записывают,

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Мы видим, таким образом, что любое число состоит как бы из «кирпичиков» – простых множителей, возникающих в его каноническом разложении. Простое число состоит из одного такого «кирпичика» – самого себя.

Каноническое разложение является мощным инструментом решения целого ряда задач. Благодаря ему перед нами открывается вся картина делителей данного числа. Так, для числа $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ мы теперь можем сразу сказать, что оно делится, например, на $2^3 = 8$, на $2^2 \cdot 3 = 12$, на $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ (так как эти числа «сконструированы» из отдельных элементов канонического разложения) и не делится, скажем, на 7 и на $3^3 = 27$ (так как ни 7, ни 27 не входят в каноническое разложение).

Задачи

1. Найдите каноническое разложение числа 3150. Покажите, что оно делится на 6, 14, 18, 21, 35, 42, 45. Делится ли оно на 12, 22, 26, 27?
2. Не вычисляя произведения $2013 \cdot 15 \cdot 77$, выясните, делится ли оно на 2, 3, 9, 35, 55, 80, 6039.
3. Число A делится на 3 и 4. Следует ли отсюда, что A делится на $3 \cdot 4 = 12$?
4. Число A делится на 4 и 6. Следует ли отсюда, что A делится на $4 \cdot 6 = 24$?
5. Число $3A$ делится на 7. Следует ли отсюда, что A делится на 7?
6. Число $9A$ делится на 6. Следует ли отсюда, что A делится на 6?
7. Докажите, что произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.
8. Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.
9. Допишите к числу 523. . . три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9. Сколько всего таких чисел существует?
10. На сколько нулей оканчивается число $100!$?
11. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.1*) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?
12. (*Математический праздник, 1999, 6.2*) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение – 420.
13. (*Математический праздник, 2007, 6–7.2*) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)
14. (*Московская устная олимпиада, 2016, 6.2*) Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6. Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырёхзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?
15. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.2*) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста

вдвое, а творческие – втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

16. (Московская устная олимпиада, 2019, 6.5, 7.4) В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменов соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки – произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья – 5, Сол – 12, Джессика – 24, Акийо – 54, Михо – 64, Петра – 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

17. (Математический праздник, 1995, 7.1) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

18. (Математический праздник, 2008, 7.1) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

19. (Московская устная олимпиада, 2009, 7.1) Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, к второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.4) Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых – кубик размером $1 \times 1 \times 1$ см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из её сторон меньше 10 см.

21. (Всеросс., 2018, МЭ, 7.4) На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

22. («Высшая проба», 2017, 7.3, 8.1) Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3 .

23. (Математический праздник, 2009, 7.6) Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

24. (Математический праздник, 1996, 7.6) Произведение последовательных чисел от 1 до n называется n -факториал и обозначается $n!$ ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$). Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

25. («Ломоносов», 2017, 7–8.6, 9.4) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m + n$.

2. Задачи по теме «Неравенства в теории чисел»

При решении задач в теории чисел важную роль играют неравенства.

Прежде, чем переходить к решению задач, отметим два неравенства, которые постоянно используются при решении задач:

Неравенства в теории чисел

1. Пусть про натуральные числа a и b известно, что $a:b$, тогда $a \geq b$.
2. Пусть d – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b , $a \neq b$, тогда

$$|a-b| \geq d.$$

Ниже рассматриваются решения нескольких задач с использованием неравенств в теории чисел.

Задача 1. Пусть $a, q \neq 1, p \neq 1$ — такие натуральные числа, что $ap+1:q, aq+1:p$. Докажите, что

$$a > pq/2(p+q).$$

Решение. Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно предположим противное: у них есть общий простой делитель r . Тогда $aq+1:p:r$ и $aq:r$, следовательно, $1:r$. Значит, p и q взаимно просты. Тогда мы получаем, что число $ap+aq+1=ap+(aq+1)$ делится на p . Аналогично, оно делится на q . Т.к. p и q взаимно просты, то $ap+aq+1:pq$. Значит, $ap+aq+1 \geq pq$. Поэтому

$$a \geq (pq-1)/(p+q) > pq/2(p+q),$$

т.к. $pq-1 \geq pq/2$, действительно $pq > 2$ (p и q не равны 1). Тем самым задача решена.

Задача 2. Пусть $a \neq b \in \mathbb{N}$ и при этом $ab(a+b):(a^2+ab+b^2)$. Докажите, что $|a-b| > (ab)^{1/3}$.

Решение. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел a и b . Ключевой идеей в это задаче является неравенство

$$|a-b| \geq d, \text{ при } a \neq b.$$

Почему оно верно? Пусть $a=da_1$, $b=db_1$, здесь $a_1 \neq b_1$ и взаимно просты, тогда $|a-b|=d|a_1-b_1| \geq d$.

Из этого неравенства следует, что нам достаточно доказать, что

$$d > (ab)^{1/3} = d^2 (a_1 b_1)^{1/3}.$$

Последнее неравенство несложно преобразуется в $d > a_1 b_1$. Докажем теперь это неравенство.

По условию нам известно, что

$$ab(a+b) = d^3 a_1 b_1 (a_1 + b_1) : (a^2 + ab + b^2) = d^2 (a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2),$$

то есть

$$da_1 b_1 (a_1 + b_1) : (a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2). \quad (1)$$

Заметим, что числа a_1 и $a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2$ взаимно просты, т.к. $(a_1, a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2) = (a_1, b_1^2) = 1$, поскольку у a_1 и b_1 нет общего делителя, отличного от 1. Аналогичным образом b_1 взаимно просто с $a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2$.

Покажем, что $a_1 + b_1$ взаимно просто с $a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2$. Действительно,

$$(a_1 + b_1, a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2) = (a_1 + b_1, (a_1 + b_1)^2 - a_1 b_1) = (a_1 + b_1, a_1 b_1),$$

отсюда нетрудно получаем, что если у чисел $a_1 + b_1$ и $a_1 b_1$ был бы общий простой делитель p , то по крайней мере одно из чисел a_1 или b_1 делилось бы на него (т.к. $a_1 b_1$ делится на p), а значит и второе из чисел a_1 или b_1 делится на p (т.к. $a_1 + b_1$ делится на $a_1 + b_1$), т.е. a_1 и b_1 не взаимно просты. Таким образом, получаем, что $a_1 + b_1$ и $a_1 b_1$ взаимно просты, а значит и $a_1 + b_1$ взаимно просто с $a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2$.

Отсюда из (1) и взаимной простоты чисел $a_1 b_1$ ($a_1 + b_1$) и $(a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2)$ мы заключаем (в силу основной теоремы арифметики), что $d : (a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2)$, то есть $d \geq a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2 > a_1 b_1$.

Тем самым, мы завершили решение задачи.

**Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей ИГУ г. Иркутска (МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска)**

Утверждено приказом директора

МАОУ Лицея ИГУ г. Иркутска

№ 01-06-60/1 от 30.04.2020

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА
«Нестандартные задачи элементарной математики»
для 10-11 естественно-математических, информационно-математических и лингво-математических классов**

Срок реализации программы 2 года

Составители программы: Коваленок И.Л. учитель математики МАОУ
Лицей ИГУ г. Иркутска
Осипенко Л.А., кандидат физико-математических
наук, доцент, учитель математики МАОУ
Лицей ИГУ г. Иркутска

г. Иркутск, 2020 год

Пояснительная записка

Рабочая программа спецкурса «Нестандартные задачи элементарной математики» отвечает требованиям к планируемым результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования, реализующей ФГОС СОО, с учетом особенностей организации образовательного процесса Лицея ИГУ в классах с углубленным изучением математики.

В рабочую программу включены содержание, тематическое планирование, требования к уровню подготовки учащихся, также в нее как приложения включены оценочные и методические материалы.

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс	11 класс	
Количество учебных недель	35	34	
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	35	34	69 часов

Уровень подготовки учащихся - профильный, с углубленной подготовкой

Литература для учащихся:

1. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. 11. Профильный уровень. – М.: БИНОМ, 2012.
2. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. 11. Профильный уровень. – М.: БИНОМ, 2012
3. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. 10-11. Профильный уровень. Задачник. – М.: БИНОМ, 2013
4. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2010. - 336 с.
5. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. - Минск: Асар, 1996. -458с.

Литература для учителя

1. Шестаков С.А. ЕГЭ 2019. Математика. Задачи с параметрами. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2019. – 288 с.
2. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 10 классов средней школы. - М.: Просвещение, 1989. - 252 с.
3. Шарыгин И.Ф. Математика для школьников старших классов.- М.: Дрофа, 1995. - 496 с.
4. Дорофеев Г.В. Квадратный трехчлен в задачах. - Львов, 1991. - 103 с. -(Квантор; 2).
5. Карп А.П. Даю уроки математики... Из опыта работы. - М.: Просвещение, 1992. - 191 с.
6. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. - М.: МЦНМО, 2007.
7. Марков В.К. Метод координат и задачи с параметрами. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. - 146 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач: методические рекомендации. - Киев: Агрофирма "Александрия", 1993. -60с.
9. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. - М.: МЦНМО, 2007.
10. Пятьсот четырнадцать задач с параметрами под ред. Тынянкина С.А. - Волгоград: Б.И., 1991. - 160 с.

Содержание программы

10 класс

I Аналитические методы решения основных типов задач (9 часов)

Решение алгебраических уравнений с параметрами аналитическими методами:

- Решение линейных уравнений с параметрами.
- Решение линейных неравенств с параметрами.
- Решение квадратных уравнений и неравенств с параметрами.
- Решение уравнений и неравенств с параметром, содержащих переменную под знаком модуля.
- Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.

II Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах (7 часов)

«Каркас» квадратичной функции. Теорема Виета. Определение знаков корней квадратного трёхчлена. Расположение корней квадратичной функции относительно данных точек.

III Графические интерпретации (13 часа)

Построение графиков функций и геометрических мест точек, удовлетворяющих заданным условиям: уравнениям, неравенствам, системам уравнений и неравенств. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом сечений. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом областей.

IV Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств (6 часов)

Решение уравнений и неравенств с применением свойств функций: монотонности, ограниченности, в том числе уравнений и неравенств с параметрами.

11 класс

I Логический перебор в задачах с параметрами и нестандартных задачах (10 часа)

Алгебраические уравнения и неравенства. Трансцендентные уравнения и неравенства. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром.

II Графические интерпретации и геометрические идеи (14 часа)

Построение геометрических мест точек, удовлетворяющих заданным условиям. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом сечений. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом областей.

III Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств (8 часов)

Применение монотонности и ограниченности функций при решении уравнений и неравенств с параметрами. Применение производной при решении задач с параметром

IV Итоговое повторение (2 часов)

Решение задач ЕГЭ с параметрами.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

10 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
Аналитические методы решения основных типов задач		9	
1	Решение линейных уравнений с параметром	1	
2	Решение линейных неравенств с параметром	1	
3	Квадратные уравнения с параметром.	1	
4	Решение квадратных неравенств с параметром.	1	
5	Рациональные уравнения и неравенств с модулем, содержащие параметр.	1	
6	Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.	1	
7	Решение задач	1	
8	Контрольная работа №1		1
9	Работа над ошибками.	1	
Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах		7	
10	«Каркас» квадратичной функции. Дискриминант, старший коэффициент и вершина.	1	
11	Теорема Виета.	1	
12	Определение знаков корней квадратного трехчлена.	1	
13-14	Расположение корней квадратичной функции относительно данных точек.	2	
15	Контрольная работа №2		1
16	Работа над ошибками.	1	
Графические интерпретации		13	
17	Построение геометрических мест точек, заданных уравнениями	1	
18	Построение геометрических мест точек, заданных неравенствами.	1	
19	Построение геометрических мест точек, заданных системами уравнений и неравенств.	1	
20-21	Метод областей. Решение уравнений с параметром методом областей.	2	
22	Метод областей. Решение неравенств с параметром методом областей.	1	
23	Решение систем уравнений и неравенств с параметром методом областей.	1	
24	Метод сечений. Применение к решению уравнений с параметром.	1	
25-26	Решение систем уравнений методом сечений.	2	
27	Решение задач с параметрами графическими методами.	1	
28	Контрольная работа №3		1
29	Работа над ошибками.	1	

Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств		6	
30	Применение свойства монотонности функций при решении уравнений и неравенств.	1	
31	Применение свойства ограниченности функций при решении уравнений и неравенств.	1	
32-33	Решение задач с параметром с использованием различных свойств функции.	2	
34	Контрольная работа №3		1
35	Работа над ошибками.	1	

11 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
Логический перебор в задачах с параметрами и нестандартных задачах		10	
1-2	Алгебраические уравнения и неравенства	2	
3-4	Трансцендентные уравнения	2	
5-6	Трансцендентные неравенства	2	
7-8	Квадратный трехчлен в задачах с параметром.	2	
9	Контрольная работа №1		1
10	Работа над ошибками	1	
Графические интерпретации		14	
11-12	Построение геометрических мест точек, заданных трансцендентными уравнениями и неравенствами.	2	
13-14	Решение трансцендентных уравнений методом областей	2	
15-17	Решение трансцендентных неравенств методом областей.	3	
18-20	Решение трансцендентных уравнений методом сечений.	3	
21-22	Решение задач с параметрами графическими методами	2	
23	Контрольная работа №2		1
24	Работа над ошибками	1	
Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств.		8	
25-26	Применение свойства монотонности функций при решении уравнений и неравенств с параметрами.	2	
27-28	Применение свойства ограниченности функций при решении уравнений и неравенств с параметрами.	2	
29	Применение производной при решении задач с параметром	1	
30	Подготовка к контрольной работе	1	
31	Контрольная работа №3		1
32	Работа над ошибками	1	
Итоговое повторение.		2	
33-34	Решение задач ЕГЭ.	2	

Планируемые результаты

10 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- решать линейные уравнения, неравенства и их системы с параметрами;
- различным подходам к отбору корней квадратного уравнения;
- проводить отбор корней квадратного уравнения графическим методом (расположение параболы на координатной плоскости);

- различным методам построения геометрических мест точек на координатной плоскости, задаваемых алгебраическими уравнениями, неравенствами, системами уравнений и неравенств;
- решать алгебраические уравнения и неравенства с параметрами методом сечений семейством линий $y = ax$, $y = |x+a|$; $x^2+y^2=r^2$;
- решать простейшие задачи с параметром методом областей;
- использовать свойства монотонности и ограниченности функции при решении уравнений и неравенств.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов;
- интерпретировать полученные результаты.

Учащиеся получают возможность научиться:

- свободно определять тип и выбирать метод решения уравнений и неравенств с параметрами;
- применять функциональные методы решения уравнений и неравенств.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- основным типам задач с параметрами;
- различным подходам к решению трансцендентных уравнений и систем уравнений с параметрами;
- проводить отбор корней квадратного уравнения различными методами;
- решать трансцендентные уравнения с параметрами, сводящиеся к задаче на исследование квадратного трехчлена;
- использовании свойств монотонности, ограниченности функции и инвариантность при решении уравнений и неравенств;
- производить отбор корней уравнений с параметрами методом областей;
- решать алгебраические уравнения и неравенства с параметрами методом сечений семейством линий $y = ax + b$, $y = (x + a)^2$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- интерпретировать свойства функций в контексте конкретной практической ситуации;
- выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов;

- составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов.

Выпускник получит возможность научиться:

- формулировать условие существования решений простейших трансцендентных уравнений и систем уравнений с параметрами;
- различным методам построения геометрических мест точек на координатной плоскости, задаваемых трансцендентными уравнениями, неравенствами;

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

Контрольная работа №1

1. При каком значении a уравнение $a(2a + 4)x^2 - 5a - 10 = 0$ имеет более двух решений?
2. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (2a - 5)x + a^2 - 5a < 0 \\ x^2 - 5x - 24 \geq 0 \end{cases}$$
 не имеет решений?
3. Найдите наименьшее целое решение параметра m при котором решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y - 2x = 2m \end{cases}$$
 удовлетворяет неравенству $x + y > 0$.

Контрольная работа №2

1. Найдите все значения параметра a , для которых неравенство $ax^2 + 2ax - a + 1 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x .
2. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ положительные?
3. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 + 3(a - 2)x + 2a^2 - 7a + 5 = 0$ больше -2 .
4. При каких значениях параметра a ровно один корень уравнения

$$(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$$
 расположен на интервале $(0, 3)$?

Контрольная работа №3

1. Определить количество решений уравнения в зависимости от значения параметра a :

$$1 + 2|1 + x| = a - 3x$$
2. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 2ay + x^2 = 9 - a^2 \\ |y + |x|| = 4 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.
3. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$$
 - А) При каких значениях параметра a система имеет единственное решение?
 - Б) При каких значениях параметра a система верна при всех $x \in [0, 5; 1]$.

В) При каких значениях параметра a система верна хотя бы при одном значении $x \in [0,5;1]$?

11 класс

Контрольная работа № 1

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 + 1} = x + a$ имеет решение?
2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x = 0$ имеет решение?
3. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(2a - 7)x^2 + (19 - 5a)x < 3a - 6$ при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(4, 5)$.

Контрольная работа № 2

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} y = |x - a| + 1 \\ (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.
2. Множество M состоит из всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:
$$\begin{cases} x^2 - (a - 2)x - 2 \leq y \\ 2x + y - a \leq 0 \end{cases}$$
. Определите, при каких значениях параметра a множество M содержит отрезок $[-1, 0]$ оси Ox .
3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 6x + a| > 10$ не имеет решений на отрезке $[a, a + 6]$.

Контрольная работа № 3

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a + 1 - ax + \sqrt{-x^2 + 10x - 24} = 0$ имеет чётное число решений.
2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a \sin 3x + \sqrt{3(1 - a)} \cdot \cos 3x = 2a - 3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi, \pi]$.
3. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$ имеет хотя бы одно решение.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Подборка заданий по теме «Квадратные уравнения с параметрами»

1. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения $9x^2 - 6ax + 2a^2 - 12a + 27 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?
2. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (2a - 5)x + a^2 - 5a < 0 \\ x^2 - 5x - 24 \geq 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений?}$$

3. Для каждого c укажите число корней уравнения $3x|x| + x^2 - 8x = c$
4. При каких значениях a множеством всех решений неравенства $x^2 + ax - 1 < 0$ будет интервал длины 5 ?
5. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ положительные?
6. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ больше 3 , а другой меньше 2 ?
7. При каких значениях параметра a ровно один из корней уравнения $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ расположен на $(0, 3)$?
8. Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество всех решений неравенства $(p - x^2)(p + 2x - 8) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 4$?
9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $y(x) = -x^2 - 6ax + (-a^2 + 2a + 4)$ на отрезке $0 \leq x \leq 3$ равно 5 .
10. При каких значениях параметра a уравнения $4ax^2 - 12x + 3a + 5 = 0$ и $(a + 1)x^2 - 6ax + 4 = 0$ равносильны?

Подборка задач с параметрами

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?
2. При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{x+b} = x + 3$ имеет единственное решение?
3. При каком значении параметра b уравнение $b|x - 3| = x + 1$ имеет единственное решение? Найти это решение.
4. Сколько решений в зависимости от параметра b имеет уравнение $|x - 4| = bx + 2$?
5. Для каждого значения параметра a укажите количество корней уравнения:
 - 1) $x + \frac{4}{x^2} = a$;
 - 2) $\frac{a}{2x+1} = e^{-x^2}$;
 - 3) $x \ln^2 x = a$;
 - 4) $x^2 - \frac{16}{x} = a$;
 - 5) $x^3 - 3x^2 + 2 = a$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $4 \sin x + 9 = a(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ имеет решение?
7. Найти все значения параметра c , при которых неравенство $1 + \log_2 \left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2} \right) \geq \log_2 (cx^2 + c)$ имеет хотя бы одно решение.
8. Найти все значения a , при которых неравенство $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$ справедливо при всех x .
9. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 1) \cdot 2^{2x} + 2^x + 3 - a = 0$ имеет единственное решение?
10. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $2^x - a$, -2^{-x-1} и $4^x + 4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?
11. Найти все значения a , при которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a - 1) \cdot 3^x + a > 1$ выполняется при всех x .

12. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $5x - |3x - |x + a|| = 10|x - 2|$ имеет хотя бы один корень.
13. Найти все значения x , при каждом из которых неравенство $(a + 2)x^3 - (1 + 2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$ выполняется хотя бы при одном a , принадлежащем отрезку $[-2, 1]$.
14. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^4 - (a - 1) \cdot y \cdot \sqrt{a + 3} + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \\ y = x^2 \cdot \sqrt{a + 3} \end{cases}$$
 имеет ровно три решения?
15. Найти все такие значения a , что для любого значения b найдётся хотя бы одно значение c такое, что система уравнений
$$\begin{cases} bx + y = ac^2 \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.
16. Даны три утверждения:
- 1) уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ не имеет решений;
 - 2) справедливо равенство $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;
 - 3) система
$$\begin{cases} x + y^2 = a \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.
- При каких a два из этих утверждений верны, а одно – неверно.
17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leq \frac{108a - 161}{2a - 3} \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geq 54 \end{cases}$$
 имеет решение.
18. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\cos 2x + 4(a + 2)\sin x - (2a^2 + 8a + 3) < 0$ выполняется при всех x .
19. При каких значениях параметра a уравнения $\sin x = 2\sin^2 x$ и $4\sin^3 x - 2(a - 1)\sin^2 x + (a - 2)\sin x = 0$ равносильны?
20. При каких значениях a выражение $1 + \sin x(3\sin x + a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x ?
21. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ один корень?
22. При каких значениях m уравнение $(2m + 3)\cos^2 x + (m + 1)\cos x + 4 = 0$ имеет два различных корня на промежутке $(-\pi; \pi)$?

Разработка урока-соревнования
«Математический бой» (для 11-ых классов)
учитель - Осипенко Л.А.

I Предварительная подготовка:

Класс разбивается на две команды (приблизительно равные по силе). В каждой команде выбирается капитан.

Роль капитана: правильно организовать работу команды, распределить ответственных за решение каждой задачи. В самом «бое» участие не принимает, а является членом жюри.

II Ход урока (продолжительность 2 часа 40 минут)

1. (3 - 5 минут). Разыгрывается очередность вызова на бой: первой вызывает противника на бой та команда, чей капитан первым правильно решит предложенную задачу.
2. (2 - 3 минуты). Капитанам раздаются правила проведения боя, система оценки и условия задач.
3. (1 час - 1 час 15 минут). Команды решают предложенные задачи (в разных кабинетах).
4. (1 час - 1 час 15 минут). «Математический бой».
5. (5 - 10 минут). Подведение итогов.

III Правила игры

Подготовительный этап: за час необходимо решить шесть задач (одинаковые для обеих команд), распределить, кто за какую задачу «отвечает» (по два человека на задачу), выработать стратегию боя - то есть установить очередность задач для вызова на «бой».

Математический бой: игру начинает команда, капитан которой победил в предварительном турнире: за ними право выбора «оружия», то есть задачи. Игра начинается словами «Мы приглашаем на бой соперников с задачей №...» и зачитывается текст задачи. После чего выходят представители команды соперников и решают предложенную задачу на доске. Отвечающие за эту задачу в первой команде, выступают в роли оппонентов: их цель либо найти ошибку в решении или обосновании решения задачи, либо доказать нерациональность решения и предложить свое, более рациональное решение.

После «турнира» по первой задаче, вызов делает вторая команда и т.д.

Если вызванная на бой команда не решила данную задачу, то ее решает первая (вызывающая) команда, вторая оппонирует и теряет «ход», то есть ее опять вызывают на бой.

Если ни одна из команд не может предложить решение какой-либо задачи, то с вызывающей на бой команды (с этой задачей) снимаются штрафные очки (по решению жюри) и ход переходит к следующей команде.

В ходе боя *капитан* имеет право взять один *тайм-аут* и поговорить с командой.

IV Система оценки

Каждая задача оценивается по *десятибалльной* системе. Эти баллы распределяются между командами следующим образом:

- ❖ если после предложенного командой решения оппоненты противника не смогли найти ошибок в решении или доказать его нерациональность, все баллы присваиваются этой команде (счет 10: 0);
- ❖ если оппонентам удалось найти и обосновать ошибку в объяснении решения, то им присуждается 1-3 балла (счет 9:1, 8:2 или 7:3);
- ❖ если оппонентам удалось доказать нерациональность решения, то им присуждается 3-5 баллов (счет 7:3, 6:4 или 5:5);
- ❖ если оппоненту удалось доказать, что в решении допущена ошибка или решение полностью неправильное (в этом случае предлагается свое решение и противник автоматически становится оппонентом), то им присуждается 5-10 баллов (счет 5:5, 4:6, 3:7, 2:8, 1:9 или 0:10).

Каждый из членов жюри заполняет свой протокол. Затем выводится средняя сумма баллов. Побеждает тот, кто наберет больше баллов.

V Задачи

1. При каких a уравнение $|x+a|+|x+4|=8$ и неравенство $\sqrt{2x+8} \geq x$ равносильны?
2. Меньшая диагональ, сторона, и большая диагональ ромба являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти углы ромба.
3. Решить уравнение $\log_2(3-|\sin x|) = 2^{-|\pi-x|}$.
4. Найти трехзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его десятичной записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.
5. Если в двухмильном забеге жираф может выиграть у носорога $1/8$ мили, а носорог способен опередить гиппопотама на $1/4$ мили, то на какое расстояние жираф мог бы опередить гиппопотама?
6. Построить г. м. т.: $|y - \sin x| = y + \sin x$.

Задача для капитанов: Решить уравнение $(x^2 - 1)^2 + |x + 1| = 0$

VI Решение задач

Задачи по теме: "Применение свойств функций при решении уравнений и неравенств."

I Ограниченность функций.

Решить уравнение.

1. $\sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$;
2. $3 \cos x + 4 \sin x = x^2 - 6x + 14$;
3. $4y^2 - 4y \cos x + 1 = 0$;
4. $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)y + 9 = 0$;
5. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$;
6. $\cos(\pi\sqrt{x}) \cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$;
7. $\log_2(3-|\sin x|) = 2^{-|\pi-x|}$;

1.

Решить задачи с параметрами.

1. Найти все a при которых уравнение $1 + a \cos x = (a+1)^2$ имеет решение.
2. Найти все целые k при каждом из которых уравнение $5 - 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 3k$ имеет решения.
3. При каких $a > 0$ уравнение $4^x + 2 = a 2^x \sin \pi x$ имеет ровно одно решение?
4. При каких значениях параметра p система
$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 + 2p + 4 \leq 4 \sin y + 3 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

II Монотонность функций

1. Решить уравнения:

- 1) $(x+1)^3 = 41 - 3x - x^3$; 2) $4x^5 + 2x^3 + 71 = (3-x)^3 + 1$; 3) $x^{1997} + 1 = \sqrt{5-x}$;
- 4) $\sqrt{3-x} = 1 - \frac{5}{x-4}$; 5) $\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x+1} = 2$; 6) $\sqrt{3x^2 - x + 2} + \sqrt{x+1} = 2$;

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} = 2^x$, 8) $4^x - (7-x)2^x + 12 - 4x = 0$; 9) $4^x + 3^x = 5^x$;

10) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x$.

2. Решить уравнения вида $f(f(x))=x$:

1) $\sqrt{1+\sqrt{x}} = x-1$; 2) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$;

3) $\ln(1+\ln x) = x-1$; 4) $\sqrt[3]{x} + 1 = 2(2x-1)^3$.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a|+2) = 0$ имеет три решения.

5. Найти значения параметра a , при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$ не превосходит числа решений уравнения

$$x + (3a - 2)^2 3^x = (8^a - 4) \log_3 \left(3^a - \frac{1}{2} \right) - 3x^3.$$

Утверждено приказом директора

МАОУ Лицея ИГУ г. Иркутска

№ 01-06-60/1 от 30.04.2020

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА
«Нестандартные задачи элементарной математики»
для 10-11 физико-математических и экономико-математических классов**

Срок реализации программы 2 года

Составители программы: Коваленок И.Л., учитель математики МАОУ
Лицей ИГУ г. Иркутска
Кузьмина Е.Ю., кандидат физико-математических
наук, доцент, учитель математики МАОУ Лицей
ИГУ г.Иркутска
Осипенко Л.А., кандидат физико-математических
наук, доцент, учитель математики МАОУ
Лицей ИГУ г. Иркутска

г. Иркутск, 2020 год

Пояснительная записка

Рабочая программа спецкурса «Нестандартные задачи элементарной математики» отвечает требованиям к планируемым результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования, реализующей ФГОС СОО, с учетом особенностей организации образовательного процесса Лицея ИГУ в классах с углубленным изучением математики.

В рабочую программу включены содержание, тематическое планирование, требования к уровню подготовки учащихся, также в нее как приложения включены оценочные и методические материалы.

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс	11 класс	Всего
Количество учебных недель	35	34	69
Количество часов в неделю	2 ч/нед	2 ч/нед	
Количество часов в год	70	68	138 часов

Уровень подготовки учащихся - углубленный.

Литература для учащихся:

6. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. 11. Профильный уровень. – М.: БИНОМ, 2012.
7. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. 11. Профильный уровень. – М.: БИНОМ, 2012
8. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. 10-11. Профильный уровень. Задачник. – М.: БИНОМ, 2013
9. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2010. - 336 с.
10. Амелькин В.В. , Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. - Минск: Асар, 1996. -458с.

Литература для учителя

11. Шестаков С.А. ЕГЭ 2019. Математика. Задачи с параметрами. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2019. – 288 с.
12. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 10 классов средней школы. - М.: Просвещение, 1989. - 252 с.
13. Шарыгин И.Ф. Математика для школьников старших классов.- М.: Дрофа, 1995. - 496 с.
14. Дорофеев Г.В. Квадратный трехчлен в задачах. - Львов, 1991. - 103 с. -(Квантор; 2).
15. Карп А.П. Даю уроки математики... Из опыта работы. - М.: Просвещение, 1992. - 191 с.
16. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. - М.: МЦНМО, 2007.
17. Марков В.К. Метод координат и задачи с параметрами. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. - 146 с.
18. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач: методические рекомендации. - Киев: Агрофирма "Александрия", 1993. -60с.
19. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. - М.: МЦНМО, 2007.
20. Пятьсот четырнадцать задач с параметрами под ред. Гынянкина С.А. - Волгоград: Б.И., 1991. - 160 с.

Содержание программы для 10-11 классов

10 класс

I Аналитические методы решения основных типов задач (20 часов)

Решение алгебраических уравнений с параметрами аналитическими методами:

- Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений с параметрами.
- Решение линейных неравенств и систем линейных неравенств с параметрами.
- Решение квадратных уравнений и неравенств с параметрами.
- Решение систем линейных и квадратных неравенств с параметром.
- Рациональные и дробно-рациональные уравнения с параметром.
- Решение уравнений и неравенств с параметром, содержащих переменную под знаком модуля.
- Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.

II Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах (12 часов)

«Каркас» квадратичной функции. Теорема Виета. Определение знаков корней квадратного трёхчлена. Расположение корней квадратичной функции относительно данных точек. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трёхчлена.

III Графические интерпретации (24 часа)

Построение графиков функций и геометрических мест точек, удовлетворяющих заданным условиям: уравнениям, неравенствам, системам уравнений и неравенств. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом сечений. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом областей.

IV Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств (14 часов)

Решение уравнений и неравенств с применением свойств функций: монотонности, ограниченности, в том числе уравнений и неравенств с параметрами.

11 класс

I Логический перебор в задачах с параметрами и нестандартных задачах (20 часа)

Алгебраические уравнения и неравенства. Трансцендентные уравнения и неравенства. Задачи с целочисленными неизвестными. Решение задач с параметрами аналитическими методами. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром.

II Графические интерпретации и геометрические идеи (26 часа)

Построение графиков сложных функций и геометрических мест точек, удовлетворяющих заданным условиям. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом сечений. Решение уравнений и неравенств с параметрами методом областей. Решение нестандартных задач с параметрами с использованием геометрических идей и графических интерпретаций.

III Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств (16 часов)

Применение монотонности и ограниченности функций и инвариантности при решении уравнений и неравенств с параметрами. Применение производной при решении задач с параметром

IV Итоговое повторение (6 часов)

Решение задач ЕГЭ с параметрами.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

10 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
Аналитические методы решения основных типов задач		20	
1	Решение линейных уравнений с параметром	1	
2	Решение линейных неравенств с параметром	1	
3-4	Квадратные уравнения с параметром.	2	
5-6	Решение квадратных неравенств с параметром.	2	
7-8	Решение систем линейных и квадратных неравенств с параметром.	2	
9-10	Рациональные и дробно-рациональные уравнения с параметром. Определение количества решений.	2	
11-12	Рациональные уравнения с модулем, содержащие параметр.	2	
13-14	Решение неравенств с параметром, содержащих переменную под знаком модуля.	2	
15-16	Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.	2	
17-18	Решение задач	2	
19	Контрольная работа №1		1
20	Работа над ошибками.		
Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах		12	
21-22	«Каркас» квадратичной функции. Дискриминант, старший коэффициент и вершина.	2	
23-24	Теорема Виета.	2	
25-26	Определение знаков корней квадратного трехчлена.	2	
27-28	Расположение корней квадратичной функции относительно данных точек.	2	
29-30	Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена.	2	
31	Контрольная работа №2		1
32	Работа над ошибками.	1	
Графические интерпретации		24	
33-34	Построение геометрических мест точек, заданных уравнениями	2	
35-36	Построение геометрических мест точек, заданных неравенствами.	2	
37-38	Построение геометрических мест точек, заданных системами уравнений и неравенств.	2	
39-40	Метод областей. Решение уравнений с параметром методом областей.	2	
41-43	Метод областей. Решение неравенств с параметром методом областей.	3	

44-46	Решение систем уравнений и неравенств с параметром методом областей.	3	
47-49	Метод сечений. Применение к решению уравнений с параметром.	3	
50-52	Решение систем уравнений методом сечений.	3	
53-54	Решение задач с параметрами графическими методами.	2	
55	Контрольная работа №3		1
56	Работа над ошибками.	1	
Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств		12	
57-59	Применение свойства монотонности функций при решении уравнений и неравенств.	3	
60-62	Применение свойства ограниченности функций при решении уравнений и неравенств.	3	
63-65	Решение задач с параметром с использованием различных свойств функции.	3	
66	Контрольная работа №3		1
67-70	Работа над ошибками. Решение задач с параметром	4	

11 класс,

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
Логический перебор в задачах с параметрами и нестандартных задачах		20	
1-4	Алгебраические уравнения и неравенства	4	
5-7	Трансцендентные уравнения	3	
8-10	Трансцендентные неравенства	3	
11-12	Задачи с целочисленными неизвестными.	2	
13-14	Решение задач с параметрами аналитическими методами.	2	
15-18	Квадратный трехчлен в задачах с параметром.	4	
19	Контрольная работа №1		1
20	Работа над ошибками	1	
Графические интерпретации и геометрические идеи		26	
21-22	Построение графиков сложных функций.	2	
23-24	Построение геометрических мест точек, заданных трансцендентными уравнениями и неравенствами.	2	
25-27	Решение трансцендентных уравнений методом областей	3	
28-30	Решение трансцендентных неравенств методом областей.	3	
31-34	Решение трансцендентных уравнений методом сечений.	4	
35-37	Геометрические идеи: окружность в нестандартных задачах и задачах с параметрами.	3	
38-40	Геометрические идеи: неравенство треугольника в задачах с параметрами и нестандартных задачах	3	

41-42	Геометрический смысл модуля действительного числа. Применение к решению нестандартных задач и задач с параметрами.	2	
43-44	Решение задач с параметрами графическими методами	2	
45	Контрольная работа №2		1
46	Работа над ошибками	1	
Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств.		16	
47-50	Применение свойства монотонности функций при решении уравнений и неравенств с параметрами.	4	
51-54	Применение свойства ограниченности функций при решении уравнений и неравенств с параметрами.	4	
55-56	Инвариантность.	2	
57-58	Применение производной при решении задач с параметром	2	
59-60	Подготовка к контрольной работе	2	
61	Контрольная работа №3		1
62	Работа над ошибками	1	
Итоговое повторение.		6	
63-68	Решение задач ЕГЭ.	6	

Планируемые результаты

10 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;

- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- решать линейные уравнения, неравенства и их системы с параметрами;
- различным подходам к отбору корней квадратного уравнения;
- проводить отбор корней квадратного уравнения графическим методом (расположение параболы на координатной плоскости);
- различным методам построения геометрических мест точек на координатной плоскости, задаваемых алгебраическими уравнениями, неравенствами, системами уравнений и неравенств;
- решать алгебраические уравнения и неравенства с параметрами методом сечений семейством линий $y = ax$, $y = |x+a|$; $x^2+y^2=r^2$;
- решать простейшие задачи с параметром методом областей;
- использовать свойства монотонности и ограниченности функции при решении уравнений и неравенств.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов;
- интерпретировать полученные результаты.

Учащиеся получают возможность научиться:

- производить оценку переменной;
- свободно определять тип и выбирать метод решения уравнений и неравенств с параметрами;
- применять функциональные методы решения уравнений и неравенств.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;

– распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- основным типам задач с параметрами;
- различным подходам к решению трансцендентных уравнений и систем уравнений с параметрами;
- проводить отбор корней квадратного уравнения различными методами;
- решать трансцендентные уравнения с параметрами, сводящиеся к задаче на исследование квадратного трехчлена;
- использовании свойств монотонности, ограниченности функции и инвариантность при решении уравнений и неравенств;
- производить отбор корней уравнений с параметрами методом областей;
- решать алгебраические уравнения и неравенства с параметрами методом сечений семейством линий $y = ax + b$, $y = (x + a)^2$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- интерпретировать свойства функций в контексте конкретной практической ситуации;.
- выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов;
- составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов.

Выпускник получит возможность научиться:

- определять количество решений системы в зависимости от параметра, используя свойства симметричности системы относительно переменных
- формулировать условие существования решений простейших трансцендентных уравнений и систем уравнений с параметрами;
- методам построения графиков сложных функций;
- различным методам построения геометрических мест точек на координатной плоскости, задаваемых трансцендентными уравнениями, неравенствами;

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

Контрольная работа №1

4. При каком значении a уравнение $a(2a + 4)x^2 - 5a - 10 = 0$ имеет более двух решений?

5. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (2a - 5)x + a^2 - 5a < 0 \\ x^2 - 5x - 24 \geq 0 \end{cases} \text{ не имеет решений?}$$

6. Найдите наименьшее целое решение параметра m при котором решение системы уравнений $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y - 2x = 2m \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x + y > 0$.

Контрольная работа №2

5. Найдите все значения параметра a , для которых неравенство $ax^2 + 2ax - a + 1 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x .
6. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a - 2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ положительные?
7. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 + 3(a - 2)x + 2a^2 - 7a + 5 = 0$ больше -2 .
8. При каких значениях параметра a ровно один корень уравнения $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ расположен на интервале $(0, 3)$?

Контрольная работа №3

4. Определить количество решений уравнения в зависимости от значения параметра a :
 $1 + 2|1 + x| = a - 3x$
5. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y^2 - 2ay + x^2 = 9 - a^2 \\ y + |x| = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.
6. Дана система неравенств $\begin{cases} x^2 - x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$.
А) При каких значениях параметра a система имеет единственное решение?
Б) При каких значениях параметра a система верна при всех $x \in [0, 5; 1]$.
В) При каких значениях параметра a система верна хотя бы при одном значении $x \in [0, 5; 1]$?

11 класс

Контрольная работа № 1

3. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 + 1} = x + a$ имеет решение?
4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x = 0$ имеет решение?
3. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(2a - 7)x^2 + (19 - 5a)x < 3a - 6$ при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(4, 5)$.

Контрольная работа № 2

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} y = |x - a| + 1 \\ (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.
2. Множество M состоит из всех точек плоскости, координаты которых

удовлетворяют системе неравенств: $\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 \leq y \\ 2x + y - a \leq 0 \end{cases}$. Определите, при каких

значениях параметра a множество M содержит отрезок $[-1, 0]$ оси Ox .

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 6x + a| > 10$ не имеет решений на отрезке $[a, a+6]$.

Контрольная работа № 3

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a + 1 - ax + \sqrt{-x^2 + 10x - 24} = 0$$
 имеет чётное число решений.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cdot \cos 3x = 2a - 3$$

имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi, \pi]$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2x)^5 + x^2 + a = 2x$$

имеет хотя бы одно решение.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Подборка заданий по теме «Квадратные уравнения с параметрами»

11. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$9x^2 - 6ax + 2a^2 - 12a + 27 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

12. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (2a-5)x + a^2 - 5a < 0 \\ x^2 - 5x - 24 \geq 0 \end{cases}$$
 не имеет решений?

13. Для каждого c укажите число корней уравнения $3x|x| + x^2 - 8x = c$

14. При каких значениях a множеством всех решений неравенства $x^2 + ax - 1 < 0$ будет интервал длины 5 ?

15. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ положительные?

16. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ больше 3 , а другой меньше 2 ?

17. При каких значениях параметра a ровно один из корней уравнения $(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$ расположен на $(0, 3)$?

18. Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество всех решений неравенства $(p-x^2)(p+2x-8) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 4$?

19. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $y(x) = -x^2 - 6ax + (-a^2 + 2a + 4)$ на отрезке $0 \leq x \leq 3$ равно 5 .

20. При каких значениях параметра a уравнения $4ax^2 - 12x + 3a + 5 = 0$

и $(a + 1)x^2 - 6ax + 4 = 0$ равносильны?

Подборка задач с параметрами

23. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет единственное решение?
24. При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{x+b} = x + 3$ имеет единственное решение?
25. При каком значении параметра b уравнение $b|x-3| = x + 1$ имеет единственное решение? Найти это решение.
26. Сколько решений в зависимости от параметра b имеет уравнение $|x-4| = bx + 2$?
27. Для каждого значения параметра a укажите количество корней уравнения:
- 1) $x + \frac{4}{x^2} = a$; 2) $\frac{a}{2x+1} = e^{-x^2}$; 3) $x \ln^2 x = a$; 4) $x^2 - \frac{16}{x} = a$;
5) $x^3 - 3x^2 + 2 = a$.
28. При каких значениях параметра a уравнение $4 \sin x + 9 = a(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ имеет решение?
29. Найти все значения параметра c , при которых неравенство $1 + \log_2\left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}\right) \geq \log_2(cx^2 + c)$ имеет хотя бы одно решение.
30. Найти все значения a , при которых неравенство $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$ справедливо при всех x .
31. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 1) \cdot 2^{2x} + 2^x + 3 - a = 0$ имеет единственное решение?
32. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $2^x - a$; -2^{-x-1} и $4^x + 4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?
33. Найти все значения a , при которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a - 1) \cdot 3^x + a > 1$ выполняется при всех x .
34. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $5x - |3x - |x + a|| = 10|x - 2|$ имеет хотя бы один корень.
35. Найти все значения x , при каждом из которых неравенство $(a + 2)x^3 - (1 + 2a)x^2 - 6x + (a^2 + 4a - 5) > 0$ выполняется хотя бы при одном a , принадлежащем отрезку $[-2, 1]$.
36. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^4 - (a - 1) \cdot y \cdot \sqrt{a + 3} + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \\ y = x^2 \cdot \sqrt{a + 3} \end{cases}$$
 имеет ровно три решения?
37. Найти все такие значения a , что для любого значения b найдётся хотя бы одно значение c такое, что система уравнений
$$\begin{cases} bx + y = ac^2 \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.
38. Даны три утверждения:

- 1) уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ не имеет решений;
- 2) справедливо равенство $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;
- 3) система $\begin{cases} x + y^2 = a \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

При каких a два из этих утверждений верны, а одно – неверно.

39. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых

система неравенств $\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leq \frac{108a - 161}{2a - 3} \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geq 54 \end{cases}$ имеет решение.

40. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\cos 2x + 4(a+2)\sin x - (2a^2 + 8a + 3) < 0$ выполняется при всех x .
41. При каких значениях параметра a уравнения $\sin x = 2\sin^2 x$ и $4\sin^3 x - 2(a-1)\sin^2 x + (a-2)\sin x = 0$ равносильны?
42. При каких значениях a выражение $1 + \sin x(3\sin x + a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x ?
43. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ один корень?
44. При каких значениях m уравнение $(2m+3)\cos^2 x + (m+1)\cos x + 4 = 0$ имеет два различных корня на промежутке $(-\pi; \pi)$?

Разработка урока-соревнования
«Математический бой» (для 11-ых классов)
учитель - Осипенко Л.А.

I Предварительная подготовка:

Класс разбивается на две команды (приблизительно равные по силе). В каждой команде выбирается капитан.

Роль капитана: правильно организовать работу команды, распределить ответственных за решение каждой задачи. В самом «бое» участие не принимает, а является членом жюри.

II Ход урока (продолжительность 2 часа 40 минут)

6. (3 - 5 минут). Разыгрывается очередность вызова на бой: первой вызывает противника на бой та команда, чей капитан первым правильно решит предложенную задачу.
7. (2 - 3 минуты). Капитанам раздаются правила проведения боя, система оценки и условия задач.
8. (1 час - 1 час 15 минут). Команды решают предложенные задачи (в разных кабинетах).
9. (1 час - 1 час 15 минут). «Математический бой».
10. (5 - 10 минут). Подведение итогов.

III Правила игры

Подготовительный этап: за час необходимо решить шесть задач (одинаковые для обеих команд), распределить, кто за какую задачу «отвечает» (по два человека на задачу), выработать стратегию боя - то есть установить очередность задач для вызова на «бой».

Математический бой: игру начинает команда, капитан которой победил в предварительном турнире: за ними право выбора «оружия», то есть задачи. Игра начинается словами «Мы приглашаем на бой соперников с задачей №...» и зачитывается текст задачи. После чего выходят представители команды соперников и решают предложенную задачу на доске. Отвечающие за эту задачу в первой команде, выступают в роли оппонентов: их цель либо найти ошибку в решении или обосновании решения задачи, либо доказать нерациональность решения и предложить свое, более рациональное решение.

После «турнира» по первой задаче, вызов делает вторая команда и т.д.

Если вызванная на бой команда не решила данную задачу, то ее решает первая (вызывающая) команда, вторая оппонирует и теряет «ход», то есть ее опять вызывают на бой.

Если ни одна из команд не может предложить решение какой-либо задачи, то с вызывающей на бой команды (с этой задачей) снимаются штрафные очки (по решению жюри) и ход переходит к следующей команде.

В ходе боя *капитан* имеет право взять один *тайм-аут* и поговорить с командой.

IV Система оценки

Каждая задача оценивается по десятибалльной системе. Эти баллы распределяются между командами следующим образом:

- ❖ если после предложенного командой решения оппоненты противника не смогли найти ошибок в решении или доказать его нерациональность, все баллы присваиваются этой команде (счет 10: 0);
- ❖ если оппонентам удалось найти и обосновать ошибку в объяснении решения, то им присуждается 1-3 балла (счет 9:1, 8:2 или 7:3);
- ❖ если оппонентам удалось доказать нерациональность решения, то им присуждается 3-5 баллов (счет 7:3, 6:4 или 5:5);
- ❖ если оппоненту удалось доказать, что в решении допущена ошибка или решение полностью неправильное (в этом случае предлагается свое решение и противник автоматически становится оппонентом), то им присуждается 5-10 баллов (счет 5:5, 4:6, 3:7, 2:8, 1:9 или 0:10).

Каждый из членов жюри заполняет свой протокол. Затем выводится средняя сумма баллов. Побеждает тот, кто наберет больше баллов.

V Задачи

7. При каких a уравнение $|x + a| + |x + 4| = 8$ и неравенство $\sqrt{2x + 8} \geq x$ равносильны?
8. Меньшая диагональ, сторона, и большая диагональ ромба являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти углы ромба.
9. Решить уравнение $\log_2(3 - |\sin x|) = 2^{-|\pi - x|}$.
10. Найти трехзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его десятичной записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.
11. Если в двухмильном забеге жираф может выиграть у носорога $1/8$ мили, а носорог способен опередить гиппопотама на $1/4$ мили, то на какое расстояние жираф мог бы опередить гиппопотама?
12. Построить г. м. т.: $|y - \sin x| = y + \sin x$.

Задача для капитанов: Решить уравнение $(x^2 - 1)^2 + |x + 1| = 0$

VI Решение задач

VII Литература

1. Карп А.П. Даю уроки математики... Из опыта работы. - М.: Просвещение, 1992г.
2. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов.- М.: Просвещение, 1995г.
3. Шарыгин И.Ф. Математика для школьников старших классов.- М.: Дрофа, 1995г.

Задачи по теме: "Применение свойств функций при решении уравнений и неравенств."

I Ограниченность функций.

Решить уравнение.

8. $\sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$;
9. $3 \cos x + 4 \sin x = x^2 - 6x + 14$;
10. $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} = 0$;
11. $4y^2 - 4y \cos x + 1 = 0$;
12. $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)y + 9 = 0$;
13. $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$;
14. $\cos(\pi\sqrt{x})\cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$;
15. $\log_2(3 - |\sin x|) = 2^{-|\pi-x|}$;

Решить неравенства.

2. $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$;
3. $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$;
4. $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 0$;
5. $\log_3(4 - \sin 3x) \leq \cos \frac{12x}{5}$;
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{|\log_2 x|} \geq x^2 - 2x + 2$;
7. $\log_3(4 + \cos 6x) \leq \sin \frac{x}{3}$;

Решить задачи с параметрами.

5. Найти все a при которых уравнение $1 + a \cos x = (a + 1)^2$ имеет решение.
6. Найти все целые k при каждом из которых уравнение $5 - 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 3k$ имеет решения.
7. При каких $a > 0$ уравнение $4^x + 2 = a 2^x \sin \pi x$ имеет ровно одно решение?
8. При каких значениях параметра p система
$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 + 2p + 4 \leq 4 \sin y + 3 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

II Монотонность функций

2. Решить уравнения:

- 2) $(x + 1)^3 = 41 - 3x - x^3$; 2) $4x^5 + 2x^3 + 71 = (3 - x)^3 + 1$; 3) $x^{1997} + 1 = \sqrt{5 - x}$;

$$5) \sqrt{3-x} = 1 - \frac{5}{x-4}; \quad 5) \sqrt{x^2+3x+6} + \sqrt{x+1} = 2; \quad 6) \sqrt{3x^2-x+2} + \sqrt{x+1} = 2;$$

$$8) \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} = 2^x, \quad 8) 4^x - (7-x)2^x + 12 - 4x = 0; \quad 9) 4^x + 3^x = 5^x;$$

$$11) \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x.$$

3. Решить уравнения вида $f(f(x))=x$:

$$2) \sqrt{1+\sqrt{x}} = x-1; \quad 2) x^3+1 = 2\sqrt[3]{2x-1};$$

$$4) \ln(1+\ln x) = x-1; \quad 4) \sqrt[3]{x}+1 = 2(2x-1)^3.$$

6. Решить уравнения с параметрами:

$$1) \sqrt[5]{a+x} - \sqrt[5]{a-x} = \sqrt[5]{2a}; \quad 2) \sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2-x} = a+b; \quad 3) \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a}.$$

7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9^{a^2} \log_2(|x^2-4x+3|+1) + 3^{3a-|x^2-4x+3|} \log_2\left(\frac{1}{1+3a-2a^2}\right) = 0 \text{ имеет три решения.}$$

8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a|+2) = 0 \text{ имеет три решения.}$$

9. Найти значения параметра a , при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2+a^2) = 1 - (9a^2-2)x$ не превосходит числа решений уравнения

$$x + (3a-2)^2 3^x = (8^a-4) \log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right) - 3x^3.$$

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
Курса «Решение олимпиадных задач по математике»**

10 - 11 классы

Срок реализации программы 2 года

Составитель программы: Кузьмин О.В., доктор физико-математических наук,
профессор, Заслуженный учитель РФ,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

**г. Иркутск
2020 год**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В программу включены содержание, тематическое планирование, требования к математической подготовке учащихся к концу десятого и одиннадцатого классов, а также оценочные материалы (приложение 1) и методические материалы (приложения 2).

Программа составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования по математике с учетом особенностей организации образовательного процесса Лицея ИГУ:

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс	11 класс	Всего
Количество учебных недель	35	34	69
Количество часов в неделю	2 ч/нед	2 ч/нед	
Количество часов в год	70	68	138

Уровень подготовки учащихся – углубленный.

Место предмета в учебном плане – часть, формируемая участниками образовательных отношений (часы на занятия, обеспечивающие различные интересы и потребности обучающихся).

Дополнительная литература:

1. Балаян Э.Н. Готовимся к олимпиадам по математике: 5-11 кл. – Ростов н/Д: Феникс, 2009.
2. Галкин Е.И. Нестандартные задачи по математике: Задачи логич. характера: Кн. для учащихся 5-11 кл. – М.: Просвещение; Учебная литература, 1996.
3. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров: АСА, 1994.
4. Каннель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2001.
5. Школьные олимпиады СПбГУ 2019. Математика: учеб.-метод. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петер. ун-та, 2019. – 146 с.
6. Далингер В. А. Задачи в целых числах. – Омск: Амфора, 2010. – 132 с.

Литература для учителя:

1. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров: АСА, 1994.
2. Кузьмин О.В. Перечислительная комбинаторика: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2005. – 112 с.
3. Кузьмин О. В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2006.
4. Кузьмин О.В. Принцип Дирихле: методическое пособие. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2007.
5. Фарков А. В. Методы решения олимпиадных задач. 10-11 классы. – М.: Илекса, 2016. – 110 с.

Содержание программы по курсу «Решение олимпиадных задач по математике» в 10-11 классах.

10 классы

- VI. Инварианты и принцип Дирихле (18 часов)**
Преобразования, инварианты преобразований. Четность и нечетность. Делимость и остатки. Принцип Дирихле. Метод раскрашивания.
- VII. Логические задачи (8 часов)**
Понятие графа. Решение логических задач при помощи графов. Решение нестандартных логических задач.
- VIII. Комбинаторика расположений (22 часа)**
Элементы комбинаторики расположений. Расположения и покрытия. Решения задач, связанных с расположениями на шахматной доске.
- IX. Аналитические и графические методы (16 часов)**
Решение текстовых задач. Целая и дробная части числа. Решение уравнений с целой и дробной частями числа. Неравенство Коши. Доказательство числовых неравенств.
- Итоговый контроль. Итоговая олимпиада (4 часа)**

11 классы

- I. Аналитические методы (16 часов)**
Решение уравнений и неравенств в целых числах, с целой и дробной частями числа. Неравенство Коши-Буняковского. Доказательство неравенств нестандартными методами. Решение текстовых задач.
- II. Инварианты и полуинварианты (18 часов)**
Инварианты и полуинварианты преобразований. Использование метода раскрашивания при поиске инвариантов и полуинвариантов. Исследование чисел на делимость и нахождение остатков при поиске инвариантов и полуинвариантов. Обобщенный принцип Дирихле.
- III. Логические задачи (8 часов)**
Логические задачи на нахождение оптимальной стратегии. Решение логических задач на переливания и взвешивания.
- IV. Комбинаторика расположений (22 часа)**
Методы комбинаторики расположений. Расположения и покрытия. Решения задач, связанных с расположениями на шахматной доске.
- Итоговый контроль. (4 часа)**
Итоговая олимпиада. Анализ итоговой олимпиады

Тематическое планирование

10 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Инварианты и принцип Дирихле	18	
1	Понятие инварианта. Четность и нечетность.	1	
2	Решение логических задач на инвариант.	1	
3	Решение задач на четность и нечетность.	1	
4	Решение задач на четность и нечетность.	1	
5	Делимость и остатки.	1	
6	Решение задач на делимость и остатки.	1	
7	Решение задач на делимость и остатки.	1	
8	Решение задач на делимость и остатки.	1	
9	Принцип Дирихле.	1	
10	Решение задач на принцип Дирихле.	1	
11	Решение задач на принцип Дирихле.	1	

12	Решение задач на принцип Дирихле.	1	
13	Решение задач на принцип Дирихле.	1	
14	Решение задач на принцип Дирихле.	1	
15	Метод раскрашивания.	1	
16	Решение задач на метод раскрашивания.	1	
17	Решение задач на метод раскрашивания.	1	
18	Решение задач на метод раскрашивания.	1	
	Логические задачи	8	
19	Нестандартные логические задачи.	1	
20	Решение нестандартных логических задач.	1	
21	Решение нестандартных логических задач.	1	
22	Решение нестандартных логических задач.	1	
23	Понятие графа. Основные свойства графа.	1	
24	Решение логических задач с помощью графов.	1	
25	Решение логических задач с помощью графов.	1	
26	Решение логических задач с помощью графов.	1	
	Комбинаторика расположений	22	
27	Элементы комбинаторики расположений	1	
28	Элементы комбинаторики расположений	1	
29	Элементы комбинаторики расположений	1	
30	Элементы комбинаторики расположений	1	
31	Элементы комбинаторики расположений	1	
32	Элементы комбинаторики расположений	1	
33	Расположения и покрытия.	1	
34	Задачи на расположения и покрытия.	1	
35	Задачи на расположения и покрытия.	1	
36	Задачи на расположения и покрытия.	1	
37	Задачи на расположения и покрытия.	1	
38	Задачи на расположения и покрытия.	1	
39	Расположения на шахматной доске.	1	
40	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
41	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
42	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
43	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
44	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
45	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
46	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
47	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
48	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
	Аналитические и графические методы	16	
49	Текстовые задачи.	1	
50	Решение текстовых задач.	1	
51	Решение текстовых задач.	1	

52	Решение текстовых задач.	1	
53	Целая и дробная части числа.	1	
54	Решение уравнений с целой частью.	1	
55	Решение уравнений с дробной частью.	1	
56	Уравнений с целой и дробной частями.	1	
57	Неравенство Коши	1	
58	Решение задач на неравенство Коши.	1	
59	Решение задач на неравенство Коши.	1	
60	Решение задач на неравенство Коши.	1	
61	Числовые неравенства.	1	
62	Доказательство числовых неравенств	1	
63	Доказательство числовых неравенств	1	
64	Доказательство числовых неравенств	1	
	Итоговый контроль.	4	
65-66	Итоговая олимпиада		2
67-70	Анализ решений олимпиадных задач	4	

11 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Аналитические методы	16	
1	Решение уравнений в целых числах.	1	
2	Решение неравенств в целых числах.	1	
3	Решение уравнений с целой и дробной частями числа.	1	
4	Неравенства с целой и дробной частями числа.	1	
5	Неравенство Коши-Буняковского.	1	
6	Решение задач на неравенство Коши-Буняковского.	1	
7	Решение задач на неравенство Коши-Буняковского.	1	
8	Решение задач на неравенство Коши-Буняковского.	1	
9	Нестандартные методы доказательства неравенств.	1	
10	Нестандартные доказательства неравенств.	1	
11	Нестандартные доказательства неравенств.	1	
12	Нестандартные доказательства неравенств.	1	
13	Текстовые задачи.	1	
14	Решение текстовых задач.	1	
15	Решение текстовых задач.	1	
16	Решение текстовых задач.	1	
	Инварианты и полуинварианты (часов)	18	
17	Инварианты и полуинварианты.	1	
18	Решение задач с помощью инварианта	1	
19	Решение задач с помощью инварианта	1	
20	Решение задач с помощью полуинварианта	1	

21	Использование метода раскрашивания при поиске инвариантов и полуинвариантов	1	
22	Использование метода раскрашивания при поиске инвариантов	1	
23	Использование метода раскрашивания при поиске полуинвариантов	1	
24	Использование метода раскрашивания при поиске инвариантов и полуинвариантов	1	
25	Основные методы исследования чисел на делимость и нахождение остатков при поиске инвариантов и полуинвариантов.	1	
26	Решение задач на делимость при поиске инвариантов.	1	
27	Решение задач на нахождение остатков при поиске инвариантов.	1	
28	Решение задач на делимость и нахождение остатков при поиске полуинвариантов.	1	
29	Обобщенный принцип Дирихле.	1	
30	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле.	1	
31	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле.	1	
32	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле.	1	
33	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле.	1	
34	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле.	1	
	Логические задачи	8	
35	Логические задачи на нахождение оптимальной стратегии.	1	
36	Решение задач на оптимальные стратегии.	1	
37	Решение задач на оптимальные стратегии.	1	
38	Решение задач на оптимальные стратегии.	1	
39	Задачи на переливания и взвешивания	1	
40	Решение задач на переливания	1	
41	Решение задач на переливания	1	
42	Решение задач на взвешивания	1	
	Комбинаторика расположений	24	
43	Методы комбинаторики расположений.	1	
44	Методы комбинаторики расположений.	1	
45	Методы комбинаторики расположений.	1	
46	Методы комбинаторики расположений.	1	
47	Методы комбинаторики расположений.	1	
48	Методы комбинаторики расположений.	1	
49	Решение задач на расположения.	1	
50	Решение задач на расположения.	1	
51	Решение задач на расположения.	1	
52	Решение задач на покрытия.	1	
53	Решение задач на покрытия.	1	
54	Решение задач на покрытия.	1	
55	Расположения на шахматной доске.	1	

56	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
57	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
58	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
59	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
60	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
61	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
62	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
63	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
64	Задачи на расположения на шахматной доске.	1	
	Итоговый контроль.	4	
65-66	Итоговая олимпиада		2
67-68	Анализ решений олимпиадных задач	2	

Планируемые результаты

10 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;

- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- владеть комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать логические высказывания, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные рассуждения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и логики для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения;
- применять простейшие методы системного анализа при решении задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием комбинаторных характеристик математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Учащиеся получают возможность научиться:

- свободно оперировать комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;
- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- владеть комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать логические высказывания, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций в и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;

- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные рассуждения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и логики для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения; применять простейшие методы системного анализа при решении задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием комбинаторных характеристик математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Выпускник получит возможность научиться:

- свободно оперировать комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Оценочные материалы

10 класс

Задания для итоговой (лицейской) олимпиады

1. Петя к числу 400 приписал справа четырехзначное число и в результате получил полный квадрат. Какое число приписал Петя? Найдите все варианты.
2. Решить уравнение $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$.
3. Числа x , y и z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.
4. Через одну точку окружности проведены две хорды a и b . Их концы соединены. Площадь полученного треугольника S . Найдите радиус окружности, если угол между хордами тупой.

11 класс

Задания для итоговой (лицейской) олимпиады

1. Сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 2003. Найдите количество этих чисел (все возможные случаи).
2. Доказать неравенство $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ для всех положительных значений переменных.
3. Решите уравнение $x^2 - 2x \sin xy + 1 = 0$.
4. Около окружности радиуса r описан правильный 12-угольник $A_1A_2 \dots A_{12}$. Докажите, что $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

3. Принцип Дирихле

При решении различных математических задач применяется специальный метод, получивший название: «принцип Дирихле». Существует несколько формулировок данного принципа. Самая популярная следующая:

«Если в n клетках сидит m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца».

Доказывается данный принцип Дирихле легко, методом доказательства от противного, который учащиеся 7 класса изучали на уроках. Поэтому некоторые из задач, решаемых с помощью принципа Дирихле, также можно решить, используя метод доказательства от противного, но не все.

На первый взгляд непонятно, почему это совершенно очевидное предложение тем не менее является мощным математическим методом решения задач, причем самых разнообразных. Все дело, оказывается, в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли зайцев, а что – в роли клеток. И почему надо, чтобы зайцев было больше, чем клеток. Выбор зайцев и клеток часто неочевиден. Далеко не всегда по формулировке задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он дает неконструктивное решение (то есть мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем); попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям. Рассмотрим примеры различных задач, решаемых с помощью принципа Дирихле.

1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся, как минимум, 2 ученика, отмечающих дни рождения одном месяце.

Решение. Пусть 15 учеников будут «зайцы». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как $15 > 12$, то по принципу Дирихле найдется, как минимум, одна клетка, в которой будут сидеть по крайней мере 2 «зайца». То есть найдется месяц, в котором будут отмечать дни рождения не менее 2 учеников класса. А это и требовалось доказать. Также задача легко решается с использованием метода доказательства от противного.

2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположены 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.

Решение. Это наиболее трудная задача на принцип Дирихле. Но на примере ее решения очень хорошо видны все достоинства принципа. Итак, при решении сначала надо выбрать что-то за «зайцев». Так как в условии задачи фигурирует число 5, то пусть 5 точек будут «зайцами». Так как «клеток» должно быть меньше, и чаще всего на 1, то их должно быть 4. Как получить эти 4 «клетки»? Так как в условии задачи есть еще 2 числа: 1 и 0,5; причем второе меньше первого в 2 раза, то можно получить 4 «клетки», разбив равносторонний треугольник с помощью проведения отрезков, соединяющих середины сторон (рис. 35). Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут у нас «клетками».

Так как «зайцев» 5, «клеток» 4 и $5 > 4$, то по принципу Дирихле найдется «клетка» – равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в который попадут не менее двух «зайцев» точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то мы доказали, что между некоторыми двумя точками из пяти расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

Можно показать учащимся и другие возможные разбиения треугольника на «клетки».

3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

Решение. Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» – это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тогда по принципу Дирихле найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11 будет делиться на 11. Действительно, пусть $a = 11m+q$, $b = 11n+q$, тогда $a - b = 11m+q - (11n+q) = 11(m-n)$. А $11(m-n)$ делится на 11.)

4. В ковре размером 3 3 м Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1 1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)

В данной задаче для решения необходимо применить другую формулировку принципа Дирихле:

«Пусть в n клетках сидят t зайцев, причем $n > t$. Тогда найдется хотя бы одна пустая клетка».

Посмотрим, как эту формулировку принципа Дирихле можно применить при решении данной задачи.

Решение. Здесь дырки будут «зайцами». Разрежем ковер на 9 ковриков размером 1 1 м. Так как ковриков «клеток» 9, а дырок «зайцев» 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.

Вывод. Таким образом, применяя данный метод, надо:

- 1) определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что – за «зайцев»;
- 2) получить «клетки»; чаще всего «клеток» меньше (больше), чем «зайцев», на одну (или более);
- 3) выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.

Самостоятельная работа

5. Дано 9 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 8

6. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

7. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым количеством

8. На дискотеку в студенческое общежитие, в котором 42 комнаты, пришли 36 гостей. Докажите, что найдется комната, в которую не пришел ни один гость.

9. В классе 26 учеников, из них более половины мальчики. Докажите, что какие-то 2 мальчика сидят за одним столом, если в классе 13 столов.

Задачи-шутки

10. Как одним мешком пшеницы, смолов ее, наполнить два таких же мешка?

11. Что это: две головы, две руки, шесть ног, а идут или бегут только четыре?

12. Как-то в праздник один мой знакомый сказал мне: «Позавчера мне было 40 лет, а в будущем году исполнится 43 года». Могло ли такое быть?

Домашнее задание

13. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 см расположены 7 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя точками меньше, чем 1 см.

14. В вершинах квадрата записаны числа 3, 1, 2, 5. Разрешается прибавлять к любым двум числам, стоящим в квадрате, одно и то же целое число. Можно ли через несколько ходов получить во всех вершинах одинаковые числа?

15. Имеются два ведра – одно вместимостью 4 л, другое – 9 л. Можно ли набрать из реки ровно 6 л воды?

4. Задачи по теме «Переливания»

1. Используя два ведра вместимостью 5 и 3 л, наберите из бочки 4 л воды.
2. Используя два ведра вместимостью 5 и 4 л, наберите из водопроводного крана 3 л воды.
3. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?
4. Используя девятилитровое ведро и четырехлитровый бидон, наберите из пруда 7 л воды.
5. Используя 2 ведра вместимостью 9 и 11 л, наберите из пруда 4 л воды.
6. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. Воду выплескивать на землю нельзя, другими сосудами, кроме этих трех, пользоваться нельзя.
7. Имеются двухлитровая и пятилитровая банки. Как сделать так, чтобы, в одной из них оказался ровно один литр воды?
8. Для марш-броска солдату необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе, где имеется источник воды, есть только 5-литровые фляги и 3-литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра во флягу?
9. Как, имея 5-литровое ведро и 9-литровую банку, набрать из реки ровно три литра воды?
10. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых 3-литровой банки и 5-литрового бидона. (Пользоваться другими емкостями и выливать воду на землю нельзя).
11. Отлейте из цистерны 13 л молока, пользуясь бидонами емкостью 17 л и 5 л.
12. Тому Сойеру нужно покрасить забор. Он имеет 12 л краски и хочет отлить из этого количества половину, но у него нет сосуда вместимостью в 6 л. У него 2 сосуда: один – вместимостью в 8 л, а другой – вместимостью в 5 л. Каким образом налить 6 л краски в сосуд на 8 л? Какое наименьшее число переливаний необходимо при этом сделать?
13. Имеются два полных десятилитровых бидона молока и пустые кастрюли емкостью четыре литра и пять литров. Отлейте по 2 л молока в каждую кастрюлю.

11 класс

1. Основные методы решения уравнений в целых числах

Существует множество математических задач, ответами к которым служат одно или несколько целых чисел. В качестве примера можно привести четыре классические задачи, решаемые в целых числах – задача о взвешивании, задача о разбиении числа, задача о размене и задача о четырёх квадратах. Стоит отметить, что, несмотря на достаточно простую формулировку этих задач, решаются они весьма сложно, с применением аппарата математического анализа и комбинаторики. Идеи решения первых двух задач принадлежат швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707–1783). Однако наиболее часто можно встретить задачи, в которых предлагается решить уравнение в целых (или в натуральных) числах. Некоторые из таких уравнений довольно легко решаются методом подбора, но при этом возникает серьезная проблема – необходимо доказать, что все решения данного уравнения исчерпываются подобранными (то есть решений, отличных от подобранных, не существует). Для этого могут потребоваться самые разнообразные приемы, как стандартные, так и искусственные. Подобные задания достаточно часто встречаются в олимпиадах по математике разных лет и различных уровней, а также в задании 19 ЕГЭ по математике (профильный уровень). В то же время в школьном курсе математики данная тема практически не рассматривается, поэтому школьники, участвуя в математических олимпиадах или сдавая профильный ЕГЭ по математике, обычно сталкиваются со значительными трудностями при выполнении подобного рода заданий.

Задача 1. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.

Решение. Заметим, что $n!$ оканчивается нулём при $n > 4$. Далее, при любых $n \in \mathbb{N}$, число $5n$ оканчивается либо цифрой 0, либо цифрой 5. Следовательно, при $n > 4$ левая часть уравнения оканчивается либо цифрой 3, либо цифрой 8. Но она же равна точному квадрату, который не может оканчиваться этими цифрами. Поэтому нужно перебрать только четыре варианта: $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.

$$1) n = 1 \Rightarrow k^2 = 19 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}.$$

$$2) n = 2 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5.$$

$$3) n = 3 \Rightarrow k^2 = 34 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}.$$

$$4) n = 4 \Rightarrow k^2 = 57 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}.$$

Значит, уравнение имеет единственное натуральное решение $n = 2, k = 5$.

В этой задаче использовались свойства точных квадратов, свойства факториалов, и остатки от деления обеих частей уравнения на 10.

Задача 2. Решить в целых числах уравнение $n^2 - 4y! = 3$.

Решение. Сначала перепишем исходное уравнение в виде $n^2 = 4y! + 3$. Если посмотреть на это соотношение с точки зрения теоремы о делении с остатком, то можно заметить, что точный квадрат, стоящий в левой части уравнения, даёт при делении на 4 остаток 3, что невозможно. Действительно, любое целое число представимо в одном из следующих четырёх видов:

$$x = 4a, \quad x = 4a + 1, \quad x = 4a + 2, \quad x = 4a + 3.$$

Для каждого из этих случаев имеем:

$$x^2 = 16a^2 = 4(4a^2);$$

$$x^2 = 16a^2 + 8a + 1 = 4(4a^2 + 2a) + 1;$$

$$x^2 = 16a^2 + 16a + 4 = 4(4a^2 + 4a + 1);$$

$$x^2 = 16a^2 + 24a + 9 = 4(4a^2 + 6a + 2) + 1.$$

Таким образом, точный квадрат при делении на 4 даёт в остатке либо 0, либо 1. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

Задача 3. Решить в целых числах уравнение $8z^2 = (t!)2 + 2$.

Решение. Непосредственная проверка показывает, что $t = 0$ и $t = 1$ не являются решениями уравнения. Если $t > 1$, то $t!$ является чётным числом, то есть, оно представимо в виде $t! = 2s$. В таком случае уравнение можно преобразовать к виду $4z^2 = 2s^2 + 1$. Однако, полученное уравнение заведомо не имеет решений, ибо в левой части стоит чётное число, а в правой – нечётное.

Задача 4. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

Решение. Исходное уравнение можно переписать следующим образом:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5.$$

Из условия следует, что $(x - 1), (y + 3)$ – целые числа. Следовательно, данное уравнение эквивалентно следующей совокупности:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1, \\ (y+3)^2 = 4, \\ (x-1)^2 = 4, \\ (y+3)^2 = 1. \end{cases}$$

Теперь можно выписать всевозможные целые решения уравнения.

$$(2; -1), (2; -5), (0; -1), (0; -5), (3; -1), (3; -4), (-1; -2), (-1; -4).$$

Задача 5. Решить в целых числах уравнение $z + t - 2z = 7$.

Решение. Исходное уравнение можно преобразовать к виду $(z + 1)(t - 2) = 5$. Числа $(z + 1)$, $(t - 2)$ являются целыми, поэтому имеют место следующие варианты:

- 1) $\begin{cases} z + 1 = 1, \\ t - 2 = 5. \end{cases}$ Отсюда имеем $z = 0, t = 7$.
- 2) $\begin{cases} z + 1 = 5, \\ t - 2 = 1. \end{cases}$ Тогда $z = 4, t = 3$.
- 3) $\begin{cases} z + 1 = -1, \\ t - 2 = -5. \end{cases}$ В таком случае $z = -2, t = -3$.
- 4) $\begin{cases} z + 1 = -5, \\ t - 2 = -1. \end{cases}$ Значит, $z = -6, t = 1$.

Итак, уравнение имеет ровно четыре целых решения.

Задача 6. Решить в целых числах уравнение $n(n + 1) = (2k + 1)!!$

Решение. Число $(2k + 1)!!$ нечётно при всех неотрицательных значениях k согласно определению (при отрицательных k оно вообще не определено). С другой стороны, оно равно числу $n(n + 1)$, которое чётно при всех целых значениях k . Противоречие.

Задача 7. Решить в целых числах уравнение $xy + x + 2y = 1$.

Решение. Путём преобразований уравнение можно свести к следующему:

$$x = -2 - \frac{3}{y + 1}$$

Данное преобразование не изменило ОДЗ неизвестных, входящих в уравнение, так как подстановка $y = -1$ в первоначальное уравнение приводит к абсурдному равенству $-2 = 1$. Со-

гласно условию, x – целое число. Иначе говоря, $-2 - \frac{3}{y + 1}$ тоже целое число. Но тогда $\frac{3}{y + 1}$ число $\frac{3}{y + 1}$ обязано быть целым. Дробь является целым числом тогда и только тогда, когда числитель делится на знаменатель. Делители числа 3: 1, 3, -1, -3. Следовательно, для неизвестной возможны четыре случая: $y = 0, y = 2, y = -2, y = -4$. Теперь можно вычислить соответствующие значения неизвестной x . Итак, уравнение имеет ровно четыре целых решения: $(-5; 0), (-5; 2), (1; -2), (1; -4)$.

Задача 8. Решить в целых числах уравнение $5m = n^2 + 2$.

Решение. Если $m = 0$, то уравнение примет вид $n^2 = -1$. Оно не имеет целых решений. Если $m < 0$, то левая часть уравнения, а значит, и n , не будет являться целым числом. Значит, $m > 0$. Тогда правая часть уравнения (как и левая) будет кратна 5. Но в таком случае n^2 при делении на 5 должно давать остаток 3, что невозможно (это доказывается методом перебора остатков, который был изложен при решении задачи 1). Следовательно, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Задача 9. Решить в целых числах уравнение $(x!)^4 + (y - 1)^4 = (z + 1)^4$.

Решение. Заметим, что в силу чётности показателей степеней уравнение эквивалентно следующему: $(x!)^4 + |y - 1|^4 = |z + 1|^4$. Тогда $x!$, $|y - 1|$, $|z + 1|$ – натуральные числа. Однако, согласно Великой теореме Ферма, эти натуральные числа не могут удовлетворять исходному уравнению. Таким образом, уравнение неразрешимо в целых числах.

2. Взвешивания

Задачи на взвешивание – тип олимпиадных задач по математике, в которых требуется у локализовать отличающийся от остальных предмет по весу за ограниченное число взвешиваний. Чаще всего в качестве взвешиваемых объектов используются монеты. Реже имеется также набор гирек известной массы.

Поиск решения в этом случае осуществляется путем операций сравнения, правда, не только одиночных элементов, но и групп элементов между собой. Задачи данного типа чаще всего решаются методом рассуждений.

При решении этих задач часто используется следующее соображение: весы могут пребывать в одном из трёх состояний

- перевесила левая чашка;
- перевесила правая чашка;
- чашки находятся в равновесии.

Рассмотрим, как эти рассуждения применяются при решении задач.

Задача 1. Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря массой в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

Решение. Поставим на одну чашку весов гирю весом 1 кг и уравновесим весы крупой из мешка. Чаши весов находятся в равновесии - с обеих сторон по 1 кг. Теперь снимем с весов эту гирю и вместо нее насыпем крупу. Когда этой крупы станет ровно 1 кг, весы снова окажутся в равновесии.

Задача 2. У Антошки есть 27 золотых монет. Но известно, что Филя заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Антошке определить фальшивую монету?

Решение. Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет ($27 : 3 = 9$). Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (достаточно, чтобы весы показали равенство, чтобы сделать вывод, что фальшивка – в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку с фальшивкой на три части по три монеты ($9 : 3 = 3$), положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете – фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части. Задача решена.

Задача 3. Имеются чашечные весы без гирь и 4 одинаковые по внешнему облику монеты. Одна из монет фальшивка, кроме того масса монеты по отношению к другим монетам неизвестна. Но все настоящие монеты одного веса. Сколько надо взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

Решение. Если у нас 3 монеты, достаточно двух взвешиваний. Кладем на каждую чашку весов по одной монете. Если весы не в равновесии, значит, та монета, которая осталась, – настоящая. Кладем её на весы с любой из остальных и сразу определяем, какая из них фальшивка. Если же весы в равновесии, значит, фальшивая монета та, которая осталась, и вторым взвешиванием можно даже определить, легче она или тяжелее, чем настоящие. Если у нас 4 монеты, опять достаточно двух взвешиваний. Разделим наши монеты на две кучки по 2 монеты

и положим одну из кучек на весы – по монете на каждую чашку. Если весы в равновесии, то, следовательно, обе монеты на них настоящие. Если весы не в равновесии, то обе монеты на столе настоящие. Итак, теперь мы знаем, в какой кучке лежит фальшивая монета. Положим на одну чашку весов монету из кучки, где обе настоящие, на вторую – монету из кучки, где фальшивая. Если при этом весы будут в равновесии, значит, фальшивая монета осталась на столе, а если не в равновесии, значит, мы положили её на весы (в этом случае мы даже узнаем, легче она или тяжелее).

Задача 4. В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

Решение. Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса и получим удвоенный вес трех яблок, а затем и вес трех яблок, следовательно, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трех яблок. Осталось пять взвешиваний и десять яблок, которые взвешиваем попарно и, суммируя все данные, получим вес 13 яблок.