

**Министерство образования Иркутской области  
Департамент образования города Иркутска  
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение  
Лицей ИГУ города Иркутска  
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска**

**РАССМОТРЕНО**  
на заседании методического  
объединения учителей математики  
от 29.08.2023г. протокол №1.  
Руководитель МО И.Л. Коваленок

**УТВЕРЖДЕНО**  
Приказ № 01-06-140 от  
30.08.2023 г.  
Директор Е.Ю. Кузьмина

**ПРИНЯТО**  
решением педагогического совета  
от 30.08.2023 г., протокол №1

ID -

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**ID –**

**учебного курса**

**«Развитие комбинаторно-логического мышления»**

(для 5-7 классов общеобразовательных организаций)

Срок освоения – 3 года

Уровень сложности программы **УГЛУБЛЕННЫЙ**

Количество часов по программе за весь период реализации - 102

Составители программы: Кузьмин О.В., доктор физ.-мат. наук,  
профессор, Заслуженный учитель РФ,  
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска;  
Кузьмина Е.Ю., канд. физ.-мат. наук,  
доцент, Заслуженный работник образования Иркутской  
области, учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г.  
Иркутска

**г. Иркутск, 2023 год**

## **АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ** **учебного предмета «Развитие комбинаторно логического мышления»**

Рабочая программа «Развитие комбинаторно логического мышления» (5-7 класс) разработана в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования и Положением «О рабочих программах учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования» МАОУ Лицея ИГУ г.Иркутска, утвержденного приказом директора 01-06-132 от 30.08.2023 года и является частью основной образовательной программы основного общего образования.

Рабочая программа ориентирована на целевые приоритеты, сформулированные в федеральной рабочей программе воспитания и в рабочей программе воспитания МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска.

Обучение математике направлено на совершенствование нравственной и коммуникативной культуры обучающегося, развитие его интеллектуальных и творческих способностей, мышления, памяти и воображения, навыков самостоятельной учебной деятельности, самообразования.

Содержание математике ориентировано также на развитие функциональной грамотности как интегративного умения человека читать, понимать тексты, использовать информацию текстов разных форматов, оценивать ее, размышлять о ней, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни.

Изучение математике направлено на достижение следующих целей:

В направлении личностного развития: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способностей к умственному эксперименту, интереса к математическому творчеству; формирование качеств, необходимых для адаптации в современном информационном обществе, способностей к преодолению мыслительных стереотипов.

В метапредметном направлении: формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения смежных дисциплин и продолжения обучения в профильных классах Лицея ИГУ; создание фундамента для математического развития одаренных детей.

Рабочая программа учебного предмета «Развитие комбинаторно логического мышления» входит в обязательную предметную область «Математика и информатика»

Срок реализации программы – 3 года (5 - 7 класс)

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа

	5 класс	6 класс	7 класс	Всего
Количество учебных недель	34	34	34	102
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	34	34	34	104

Для реализации программы используются следующие учебники:

- 1) Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров: АСА,
- 2) Кузьмин О. В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб.пособие. – М.: Дрофа,

- 3) Кузьмин О. В. Перечислительная комбинаторика: учеб. пособие. – М.: Дрофа,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. <http://katalog.iot.ru> - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;
2. <http://www.edu.ru> - Федеральный образовательный портал;
3. <http://school-collection.edu.ru> - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. <http://window.edu.ru> - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :<http://www.kokch.kts.ru/cdo/>
6. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое:  
<http://teacher.fio.ru>
7. Новые технологии в образовании: <http://edu.secna.ru/main/>
8. Путеводитель «В мире науки» для школьников:<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/>
9. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: <http://mega.km.ru>
10. сайты «Энциклопедий», например:<http://www.rubricon.ru/>  
<http://www.encyclopedia.ru/>

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочные материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

## Содержание программы

### 5 класс

#### 1. Занимательные и провоцирующие задачи (3 часа)

Знакомство со спецификой комбинаторных и логических задач. Упорядочение. Нахождение закономерностей.

#### 2. Основные комбинаторные правила (5 часа)

Понятие о перечислительных комбинаторных задачах. Правила суммы и произведения, как основные принципы решения перечислительных комбинаторных задач.

#### 3. Перечисление комбинаторных конфигураций (8 часов)

Понятие о комбинаторных конфигурациях. Знакомство с простейшими типами перечислительных комбинаторных задач (подсчет числа перестановок, размещений, сочетаний по два, числа подмножеств данного множества).

#### 4. Логические методы в комбинаторике (5 часов)

Классические задачи на метод включения и исключения. Знакомство с простейшими (прямыми и обратными) комбинаторно-логическими задачами и методами их решения. Понятие графа. Метод точечных графов. Круги Эйлера.

#### 5. Элементы логики (12 часов)

Выражения, предикаты, высказывания и их преобразования. Азбука рассуждений, истина, ложь. Понятия: следует; не следует; если; то; и; или. Решение задач о переправах и разъездах, на переливание, взвешивание и отыскание фальшивой монеты. Табличный метод решения логических задач. Решение задач с помощью графов. Решение задач с помощью кругов Эйлера. Знакомство с софизмами.

**Итоговый контроль. Защита творческой зачетной работы (1 час)**

## **6 класс**

### **1. Перечисление комбинаторных конфигураций (4 часа)**

Сходства и различия между комбинаторными задачами. Роль повторяемости и различимости элементов в конфигурациях. Важнейшие комбинаторные числа.

### **2. Комбинаторные методы в логике (6 часов)**

Логические задачи на метод включений и исключений. Решение логических задач с помощью кругов Эйлера.

Взаимно однозначное соответствие. Табличный метод решения логических задач. Решение логических задач методом графов.

### **3. Метод перебора (3 часа)**

Понятие об организованном переборе. Решение простейших задач на перебор возможных вариантов.

### **4. Задачи на упорядочение (7 часов)**

Понятие порядка и строгого порядка. Задачи на линейное упорядочение множества.

Циклический порядок. Задачи на расположение элементов по окружности.

Упорядоченные пары и тройки. Решение задач на упорядочение простейших комбинаторных конфигураций.

### **5. Элементы логики (4 часа)**

Высказывания и логические выводы. Истинные и ложные утверждения. Задачи о правдолюбцах и лжецах.

### **6. Игровые задачи (9 часов)**

Турнирные задачи. Соревнования двух участников.

Математические игры для двух лиц. Выигрышная позиция. Симметрия. Разбиение на пары и стратегия дополнения. Передача хода. Анализ с конца.

**Итоговый контроль. Защита творческой зачетной работы (1 час)**

## **7 класс**

### **Раздел 1. Задачи, решаемые с помощью схем и таблиц (8 часов)**

Решение логических задач с помощью кругов Эйлера.

Выделение элемента множества с помощью системы вопросов. Блок-схемы и взвешивания. Емкости и переливания.

Задачи, решаемые с помощью схем. Задачи, решаемые по трафаретам.

Табличный метод решения логических задач.

### **Раздел 2. Задачи с отношениями (7 часов)**

Задачи с транзитивными отношениями. Задачи с некорректными условиями.

Задачи с отношением равенства.

Задачи с нетранзитивными отношениями. Задачи с несколькими отношениями.

Задачи на сравнение элементов в отношениях.

### **Раздел 3. Задачи на маневрирование (2 часа)**

Переправы. Задачи о разъездах.

### **Раздел 4. Задачи, решаемые с помощью графов (3 часа)**

Метод построения дерева решения комбинаторных задач.

Решение логических задач на соответствия методом графов.

Графы и задачи на переливания.

### **Раздел 5. Перебор в логических задачах (7 часов)**

Разберем все варианты. Логика перебора. Организованный перебор. Как сделать перебор короче? Решение задач на перебор возможных вариантов.

Подбор правильного ответа и доказательство отсутствия других ответов.

### **Раздел 6. Занимательная криптография (6 часов)**

Сбежали цифры. Математические ребусы. Магические квадраты. Лингвистические задачи. Кодирование и декодирование.

### **Итоговое занятие (1 час)**

Демонстрация презентаций, защита проектов, выполненных учащимися.

## ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

5 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	<b>1. Занимательные и провоцирующие задачи</b>	<b>3</b>	
1	Веселая разминка	1	
2	Упорядочение	1	
3	Нахождение закономерностей	1	
	<b>2. Основные комбинаторные правила</b>	<b>5</b>	
4	Перечислительные комбинаторные задачи	1	
5	Правила суммы и произведения	1	
6	Решения задач на правило суммы	1	
7	Решения задач на правило произведения	1	
8	Контрольная работа за 1 четверть		1
	<b>3. Перечисление комбинаторных конфигураций</b>	<b>8</b>	
9	Комбинаторные конфигурации	1	
10	Множество и выборка	1	
11	Факториал. Подсчет числа перестановок	1	
12	Подсчет числа размещений	1	
13	Подсчет числа сочетаний по два	1	
14	Подсчет числа подмножеств данного множества	1	
15	Контрольная работа за 2 четверть		1
<b>16</b>	Решение задач на перечисление комбинаторных конфигураций	1	
	<b>4. Логические методы в комбинаторике</b>	<b>5</b>	
17	Классические задачи на метод включения и исключения	1	
18	Методы решения простейших комбинаторно-логических задач	1	
19	Понятие графа. Метод точечных графов	1	
20	Круги Эйлера	1	
21	Контрольный урок		1
	<b>5. Элементы логики</b>	<b>12</b>	
22	Выражения и предикаты	1	
23	Высказывания и их преобразования	1	
24	Азбука рассуждений, истина, ложь. Понятия: следует; не следует; если; то; и; или	1	
25	Контрольная работа за 3 четверть		1
<b>26</b>	Задачи о переправах и разъездах	1	
27	Решение задач на взвешивание	1	
28	Решение задач на переливание	1	
29	Табличный метод решения логических задач	1	
30	Решение задач с помощью графов	1	
31	Решение задач с помощью кругов Эйлера	1	
32	Знакомство с софизмами	1	

33	Итоговая контрольная работа		1
34	Защита творческой зачетной работы		1
	Итого часов:	<b>28</b>	<b>6</b>

## 6 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	<b>1. Перечисление комбинаторных конфигураций</b>	<b>4</b>	
1	Сходства и различия между комбинаторными задачами.	1	
2	Упорядочение	1	
3	Нахождение закономерностей	1	
4	Контрольный урок		1
	<b>2. Комбинаторные методы в логике</b>	<b>6</b>	
5	Логические задачи на метод включений и исключений	1	
6	Решение логических задач с помощью кругов Эйлера	1	
7	Взаимно однозначное соответствие	1	
8	Контрольная работа за 1 четверть		1
9	Табличный метод решения логических задач. Решение логических задач методом графов	1	
10	Контрольный урок		1
	<b>3. Метод перебора</b>	<b>3</b>	
11	Понятие об организованном переборе	1	
12	Решение простейших задач на перебор с помощью чётности	1	
13	Контрольный урок		1
	<b>4. Задачи на упорядочение</b>	<b>7</b>	
14	Понятие порядка и строгого порядка. Задачи на линейное упорядочение множества	1	
15	Контрольная работа за 2 четверть		1
16	Циклический порядок	1	
17	Задачи на расположение элементов по окружности	1	
18	Упорядоченные пары и тройки	1	
19	Решение задач на упорядочение простейших комбинаторных конфигураций	1	
20	Контрольный урок		1
	<b>5. Элементы логики</b>	<b>4</b>	
21	Высказывания и логические выводы	1	
22	Истинные и ложные утверждения	1	
23	Задачи о правдолюбцах и лжецах	1	
24	Контрольная работа за 3 четверть		1
	<b>6. Игровые задачи</b>	<b>9</b>	
25	Турнирные задачи	1	
26	Соревнования двух участников	1	
27	Математические игры для двух лиц	1	
28	Выигрышная позиция	1	

29	Симметрия	1	
30	Разбиение на пары и стратегия дополнения	1	
31	Передача хода	1	
32	Анализ с конца	1	
33	Итоговая контрольная работа		1
34	Защита творческой зачетной работы		1
	<b>Итого часов:</b>	25	9

## 7 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	<b>Раздел 1. Задачи, решаемые с помощью схем и таблиц</b>	<b>8</b>	
1	Решение логических задач с помощью кругов Эйлера	1	
2	Выделение элемента множества с помощью системы вопросов	1	
3	Блок-схемы и взвешивания	1	
4	Емкости и переливания	1	
5	Задачи, решаемые с помощью схем	1	
6	Задачи, решаемые по трафаретам	1	
7	Табличный метод решения логических задач	1	
8	Контрольный урок		1
	<b>Раздел 2. Задачи с отношениями</b>	<b>7</b>	
9	Задачи с транзитивными отношениями	1	
10	Задачи с некорректными условиями	1	
11	Задачи с отношением равенства	1	
12	Задачи с нетранзитивными отношениями	1	
13	Задачи с несколькими отношениями	1	
14	Задачи на сравнение элементов в отношениях	1	
15	Контрольный урок		1
	<b>Раздел 3. Задачи на маневрирование</b>	<b>2</b>	
16	Переправы		
17	Задачи о разъездах		
	<b>Раздел 4. Задачи, решаемые с помощью графов</b>	<b>3</b>	
18	Метод построения дерева решения комбинаторных задач	1	
19	Решение логических задач на соответствия методом графов	1	
20	Графы и задачи на переливания	1	
	<b>Раздел 5. Перебор в логических задачах</b>	<b>7</b>	
21	Разберем все варианты	1	
22	Логика перебора	1	
23	Организованный перебор	1	
24	Как сделать перебор короче?	1	
25	Решение задач на перебор вариантов	1	
26	Подбор правильного ответа и доказательство отсутствия других ответов	1	
27	Контрольный урок		1

	<b>Раздел 6. Занимательная криптография</b>	<b>7</b>	
28	Сбежали цифры	1	
29/2	Математические ребусы	1	
30/3	Магические квадраты	1	
31/4	Лингвистические задачи	1	
32/5	Кодирование и декодирование	1	
33/6	Контрольный урок		1
34/7	Защита творческой работы		1

### **Планируемые результаты освоения учащимися учебного предмета**

**Личностные результаты** освоения программы по математике характеризуются в части:

#### **1) патриотического воспитания:**

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

#### **2) гражданского и духовно-нравственного воспитания:**

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

#### **3) трудового воспитания:**

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

#### **4) эстетического воспитания:**

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

#### **5) ценностей научного познания:**

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением навыками исследовательской деятельности;

#### **6) физического воспитания, формирования культуры здоровья и эмоционального благополучия:**

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

### **7) экологического воспитания:**

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

### **8) адаптации к изменяющимся условиям социальной и природной среды:**

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

## **5 класс**

### ***Личностные результаты:***

1) ответственное отношение к учению, готовность и способность учащихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

2) способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений;

3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

4) первоначальное представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах её развития, о её значимости для развития цивилизации;

5) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;

6) креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении различных комбинаторных и логических задач;

### ***Метапредметные результаты:***

1) способность самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

2) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;

3) умение осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы;

4) способность адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения;

5) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;

6) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

7) развитие способности организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и

роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; умения работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;

8) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;

9) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);

10) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;

11) развитие способности видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни;

12) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять её в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;

13) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

14) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;

15) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

16) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

### ***Предметные результаты:***

#### **Учащийся научится:**

- работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- записывать условие задачи в виде таблицы или с помощью схемы, составить алгоритм решения задачи;
- решать простейшие логические задачи различными методами (методом кругов Эйлера, включения и исключения, табличным методом, с помощью графов);
- понятийному аппарату азбуки рассуждений;
- выдвигать, опровергать или доказывать простейшие гипотезы;
- различным способом проведения правильных логических рассуждений;
- понимать различие между примером и доказательством;
- отличать главное от второстепенного, доказанное от недоказанного,
- понятийному аппарату перечислительной комбинаторики (конфигурации, выборки, перестановки, размещения и т.д.);
- использовать основные комбинаторные правила (правила суммы и произведения) при решении простейших комбинаторных задач;

- пользоваться простейшими формулами подсчета числа комбинаторных конфигураций (формулы включения-исключения, подсчета числа перестановок, числа размещений, числа сочетаний по 2, числа подмножеств данного множества).

**Учащийся сможет научиться:**

- выполнять арифметические преобразования рациональных выражений, применять их для решения математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;
- применять полученные знания в нестандартных ситуациях, при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности;
- использовать основные логические приемы при проведении рассуждений в различных предметных областях.

**6 класс**

***Личностные результаты:***

- 1) коммуникативная компетентность в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности;
- 2) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;
- 3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
- 4) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
- 5) креативность мышления, инициативы, находчивости, активности при решении различных комбинаторных и логических задач;

***Метапредметные результаты:***

- 1) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;
- 2) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;
- 3) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;
- 4) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;
- 5) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);
- 8) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;
- 9) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;
- 10) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;

11) понимание сущности алгоритмических предписаний и умения действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

12) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

13) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

***Предметные результаты:***

**Учащийся научится:**

- работать с математическим текстом (структурирование необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- пользоваться простейшими формулами подсчета числа комбинаторных конфигураций;
- находить закономерности;
- решать простейшие задачи на перебор;
- решать задачи на расположение элементов по окружности;
- решать задачи на упорядочение простейших комбинаторных конфигураций;
- пользоваться простейшими формулами подсчета числа комбинаторных конфигураций;
- находить сходства и различия между комбинаторными задачами;
- решать простейшие комбинаторно-логические задачи различными способами;
- применять основные логические приемы при проведении рассуждений;
- анализировать условия, находить стратегии для простейших математических игр
- применять выигрышную позицию в игровых задачах;
- применять стратегию дополнения;

**Учащийся сможет научиться:**

- выполнять арифметические преобразования рациональных выражений, применять их для решения математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;
- применять полученные знания в нестандартных ситуациях, при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности;
- использовать основные логические приемы при проведении рассуждений в различных предметных областях.

**7 класс**

***Личностные результаты:***

б) коммуникативная компетентность в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности;

7) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

8) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

9) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;

10) креативность мышления, инициативы, находчивости, активности при решении различных комбинаторных и логических задач;

**Метапредметные результаты:**

6) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;

7) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;

8) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

9) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;

10) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);

14) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;

15) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

16) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;

17) понимание сущности алгоритмических предписаний и умения действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

18) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

19) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

**Предметные результаты:**

**Учащийся научится:**

- специфике комбинаторных и логических задач;
- методам решения простейших комбинаторных задач;
- способам проведения правильных логических рассуждений;
- проводить доказательства;
- полному и организованному перебору при решении задач.
- различать и находить сходство между различными перечислительными комбинаторными задачами;
- пользоваться простейшими блок-схемами;
- решать простейшие задачи на маневрирование;
- решать простейшие задачи с отношениями;
- решать простейшие логические задачи по трафаретам.

**Учащийся сможет научиться:**

- табличному методу решения логических задач;
- методу построения дерева решения комбинаторных задач;
- способу выделения элемента с помощью системы вопросов;
- методу кругов Эйлера.

## ***Критерии и нормы оценки знаний, умений, навыков обучающихся применительно к различным формам контроля знаний***

Контроль знаний, умений и навыков учащихся является важной составной частью процесса обучения. Целью контроля является определение качества усвоения учащимися программного материала, диагностирование и корректирование их знаний и умений, воспитание ответственности к учебной работе. Для выяснения роли контроля в процессе обучения математике рассматривают его наиболее значимые функции: обучающую, диагностическую, прогностическую, развивающую, ориентирующую и воспитывающую.

Основные виды контроля по математике это: **контрольная работа** (проводится по окончании каждой темы и полугодия), **самостоятельная работа** (текущий контроль), **тестирование** (письменное или компьютерное, проводится, в основном в выпускном классе), **устный экзамен** или **комбинированный** (проводится в конце 10 класса).

### ***Нормы оценки знаний, умений и навыков учащихся по математике***

#### ***1. Оценка устных ответов учащихся***

Ответ оценивается отметкой «5», если ученик:

- полно раскрыл содержание материала в объёме, предусмотренном программой учебников;
- изложил материал грамотным языком а определённой логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику;
- правильно выполнил рисунки, чертежи, графика, сопутствующие ответу;
- показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами» применять их в новой: ситуации при выполнении практической задания;
- продемонстрировал усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов, сформированность и устойчивость используемых при ответе навыков и умений;
- отвечал самостоятельно без наводящих вопросов учителя.
- возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые ученик легко исправил по замечанию учителя.

Ответ оценивается отметкой «4», если он удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при этом имеет один из недостатков:

- в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа;
- допущены один - два недочёта при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию учителя;
- допущены ошибка или более двух недочётов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные по замечанию учителя.

Отметка «3» ставится в следующих случаях:

- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала (определённые «Требованиями к математической подготовке учащихся»);
- имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятие, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов учителя;

- ученик не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания, но выполнил задания обязательного уровня сложности по данной теме;
- при знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность основных умений и навыков».

Отметка "2" ставится в следующих случаях:

- не раскрыто основное содержание учебного материала;
- обнаружено незнание или непонимание учеником большей или наиболее важной части учебного материала;
- допущены ошибки в определении понятий» при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов учителя.

Отметка «1» ставится, если:

- ученик обнаружил полное незнание и непонимание изучаемого учебного материала или не смог ответить ни на один из поставленных вопросов по изучаемому материалу.

## *2. Оценка письменных контрольных работ учащихся*

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трёх недочётов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере;

Отметка «1» ставится, если:

- работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ**

Примерные задания зачетной работы для 5-го класса

1. Есть два кувшина емкостью 3 и 5 литров. Как с помощью только этих кувшинов набрать из реки ровно 1 литр воды?
2. Сколькими способами можно рассадить в ряд на стулья трех учеников? Выписать все возможные случаи.
3. Коля произнес истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказал Коля? Укажите хотя бы одно такое утверждение.
4. Среди 4 монет одна фальшивая (тяжелее настоящей). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь фальшивую монету можно наверняка отделить от настоящих?

Примерные задания зачетной работы для 6-го класса

1. В коробке лежит 5 карандашей: 2 синих и 3 красных. Сколько карандашей надо взять из коробки, не заглядывая в нее, чтобы среди них был хотя бы 1 красный карандаш?
2. Три брата имеют специальности: архитектор, бетонщик, водитель. Из трех утверждений: «Алексей – архитектор», «Борис – не архитектор», «Владимир – не водитель» только одно верное. Является ли Владимир архитектором?
3. В соревнованиях по бегу Юра, Гриша и Толя заняли три первых места. Какое место занял каждый ребенок, если Гриша занял не второе и не третье место, а Толя – не третье?
4. На столе лежат две кучки шаров, по 30 шаров в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число шаров, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние шары. Кто и как выиграет при правильной игре?

**7 класс**

Примерные задания контрольной работы № 1

1. В мастерской изготовили 8 совершенно одинаковых медалей, из которых одна оказалась легче других. Как отделить эту легкую медаль от остальных при помощи весов без гирь и только за два взвешивания?
2. В соревнованиях по гимнастике Аня, Вера, Галя и Наташа заняли первые четыре места. Определите, кто какое место занял, если известно, что Галя вторая, Наташа хотя и не стала победителем, но в призеры попала, а Вера проиграла Ане.
3. К реке подъехали 4 рыцаря с оруженосцами и обнаружили одну трехместную лодку. Как им переправиться на другой берег, если все оруженосцы наотрез отказались оставаться в обществе незнакомых рыцарей?
4. Возле школы растут шесть деревьев: сосна, береза, липа, тополь, ель и клен. Какое из этих деревьев самое высокое и какое – самое низкое, если известно, что береза ниже тополя, а липа выше клена, сосна ниже ели, липа ниже березы, сосна выше тополя?
5. В бригаде полеводов 25 человек. Среди них 20 человек моложе 30 лет и 15 человек старше 20 лет. Может ли так быть?

### Примерные задания контрольной работы № 3

1. Есть два кувшина емкостью 3 и 5 литров. Как с помощью только этих кувшинов набрать из реки ровно 1 литр воды?
2. Сколькими способами можно рассадить в ряд на стулья трех учеников? Выписать все возможные случаи.
3. Коля произнес истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказал Коля? Укажите хотя бы одно такое утверждение.
4. Среди 4 монет одна фальшивая (тяжелее настоящей). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь фальшивую монету можно наверняка отделить от настоящих?

### ПРИЛОЖЕНИЕ 2

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

##### *Перечислительные комбинаторные задачи*

Комбинаторика как наука сложилась в XVII-XVIII вв. долгое время считалось, что она находится в стороне от главного русла развития математики и применяется в основном при расшифровке древних письменностей и кодировании. Позднее положение существенно изменилось, особенно в последние десятилетия в связи с появлением быстродействующих компьютеров. Комбинаторика превратилась в важный раздел математики, который используется в биологии, химии, физике, экономике, вычислительной математике и др. в связи с этим в ней возникли и многие другие методы.

Что изучает комбинаторика? Комбинации и перестановки предметов, расположения элементов, обладающие заданными свойствами, подмножества конечных множеств и способы их упорядочивания и т. д. отсюда видно, что она тесно связана с теорией множеств.

Обычный вопрос в перечислительных комбинаторных задачах: сколькими способами можно сделать то-то?

**Пример 1.** *Сколько можно составить пятизначных натуральных чисел с помощью цифр 1 и 0, если в запись каждого числа цифра 1 входит ровно три раза?*

**Решение.** Будем искать указанные числа перебором, причем так, чтобы не потерять ни одного числа. Проще начать с нахождения мест для двух нулей, так как если места для нулей определены, то три оставшихся места заполняются единицами однозначно.

Зафиксируем один из нулей на втором месте; тогда другой нуль можно записать на третьем, четвертом или пятом местах. Если теперь один нуль фиксировать на третьем месте, то второй нуль можно записать на четвертом или пятом местах (вариант, когда нули стоят на третьем и втором местах, уже встречался). Наконец, если один из нулей зафиксировать на четвертом месте, то для другого нуля остается только пятое место. Получаем 6 чисел таких:

10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100. *Ответ:* 6.

**Пример 2.** *Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра больше второй?*

**Решение.** Если первая цифра двузначного числа равна 1, то такое число только одно – 10. Если первая цифра числа равна 2, то таких чисел два – 20 и 21. Если первая цифра равна 3, то таких чисел уже три – 30, 31 и 32. И т. д. Наконец, если первая цифра равна 9, то таких двузначных чисел девять – от 90 до 98. Следовательно, всего чисел  $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ . *Ответ:* 45.

**Домашнее задание.**

1. Имеется 8 шаров: 4 синих, 3 красных, 1 белый и два ящика, один из которых вмещает не более 3 шаров, другой – не более 5. Сколькими способами можно разместить все эти 8 шаров в двух ящиках?

2. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра меньше второй?

3. Сколько существует девятизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке убывания?

4. Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 3, 5, 7, 11, если каждый множитель можно использовать в каждом из произведений не более одного раза?

5. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, которые:

- а) делятся на 2 и на 3;
- б) делятся на 2, но не делятся на 3;
- в) делятся на 3, но не делятся на 2;
- г) делятся на 2 или на 3;
- д) не делятся ни на 2, ни на 3?

**Методическое замечание.** Рекомендуется решение одного из пунктов последнего задания показать учителю, одно – решить всем вместе на доске, остальные – самостоятельно.

### **Метод перебора**

*Метод перебора* применяется в задачах, при решении которых приходится перебирать различные варианты. Перебор должен быть грамотным, т. е. таким, чтобы при его использовании были рассмотрены все случаи, которые могут представиться, а кроме того, отброшены заведомо негодные варианты, что значительно сокращает объем работы. Применяется он в основном тогда, когда значениями искомой величины могут быть только целые числа, а множество всех таких значений конечно.

Методом перебора широко пользуются ученые при решении многих важных задач. Правда, при этом большей частью возникает огромное количество возможностей, что заставляет поручить перебор электронной вычислительной машине. Например, с помощью перебора, выполненного ЭВМ, сравнительно недавно была решена знаменитая задача о красках, которая долго не поддавалась решению: "Любую ли географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы страны, окрашенные в одинаковый цвет, не имели общей границы?" Ответ оказался утвердительным. Для сокращения перебора созданы специальные методы, которые составляют новую область математики – целочисленное программирование.

Здесь мы рассмотрим сравнительно несложные задачи на метод перебора, причем такие, решение которых без этого метода было бы труднее или даже невозможно. При решении подобных задач обычно применяют и другие соображения, например свойства



**Пример 3.** Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} \text{К Р О С С} \\ + \\ \text{К Р О С С} \\ \hline \text{С П О Р Т} \end{array}$$

где каждая буква означает цифру, причем одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. Найдите все решения.

**Решение.** Обратим внимание на два последних столбца. Так как в них при сложении одних и тех же цифр С и С получаются разные цифры, то в пятом столбце должно получиться в сумме не менее десяти, откуда С не меньше пяти.

Присмотримся к третьему столбцу: когда сумма О + О может оканчиваться той же самой цифрой О? Такое возможно лишь тогда, когда О равно нулю или девяти. Но цифра О равной нулю быть не может, поскольку из четвертого столбца в третий переносится единица; значит, О равно девяти.

Вернемся к цифре С. Учитывая предыдущее, видим, что С не меньше пяти и не больше восьми. Осталось перебрать все эти возможные значения С (проделайте это самостоятельно).  
*Ответ:* 35 977+35 977=71 954.

**Методическое замечание.** Рекомендуется решение при одном значении С показать учителю, остальные – самостоятельно.

#### Домашнее задание.

1. Восстановите запись:  $*8 \times * = 8**$ . Укажите все решения.
2. Восстановите запись:

$$\text{ТЭТА} + \text{БЭТА} = \text{СУММА},$$

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. Найдите все решения.

3. В квартире 13 человек, кошек и мух. У них вместе 42 ноги, причем у каждой мухи 6 ног. Сколько было в отдельности людей, кошек и мух? Укажите все ответы.

#### Задачи на взвешивание на чашечных весах

**Пример 1.** Среди 18 монет одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета отличается по массе от настоящих монет. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (Находить фальшивую монету не нужно.)

**Решение.** Занумеруем монеты. Разобьем множество монет на три кучки, по 6 монет в каждой.

При первом взвешивании положим на одну чашку весов все монеты первой кучки, на другую – второй. Возможны два случая.

1) Пусть при этом взвешивании весы оказались в равновесии. Тогда фальшивая монета находится в третьей кучке.

Теперь положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую – третью. Если, например третья кучка перетянет, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

2) Пусть при первом взвешивании весы были в неравновесии. Тогда фальшивая монета находится или в первой, или во второй кучке. Следовательно, все монеты третьей кучки – настоящие.

Положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую – третью. Если весы оказались в неравновесии, то фальшивая монета находится в первой кучке, и последнее

взвешивание покажет, легче она или тяжелее, чем настоящая. Если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета – во второй кучке, и по первому взвешиванию также можно определить, легче она или тяжелее настоящей. *Ответ:* за два.

**Пример 2.** *Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?*

**Решение.** Уравновесим груз гирями. Затем груз уберем, оставив гири на другой чашке весов, и заменим его таким новым набором гирь, чтобы весы снова оказались в равновесии. Груз весит столько, сколько весит этот набор.

**Домашнее задание.**

1. Среди а) 25; б) 14 деталей одна бракованная, остальные – стандартные. Все стандартные детали весят одинаково, а бракованная деталь отличается по массе от стандартных деталей. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно установить, легче или тяжелее бракованная деталь, чем стандартная?

2. Как на неправильных чашечных весах с правильными гирями отвесить 1 кг крупы?

**Задачи на расположение элементов по окружности**

Займемся задачами на расположение элементов по окружности.

**Пример 1.** *На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?*

**Методическое замечание.** Рекомендуется сделать чертеж или эскиз.

**Решение.** Обозначим точками девочек в зеленом и голубом платьях, а также Нину.

Так как девочка в зеленом платье – не Аня, не Валя и не Нина, то ее зовут Галей.

Девочка в белом платье не может быть Ниной; кроме того, она не может быть ни Валей, ни Галей. Следовательно, она Аня.

Остальное теперь легко восстанавливается. *Ответ:* Аня – в белом платье. Валя – в голубом, Галя – в зеленом, Нина – в розовом.

**Пример 2.** *Однажды я решил проехаться на кресельной канатной дороге. В некоторый момент я обратил внимание, что идущее мне навстречу кресло имеет номер 95, а следующее за ним – номер 0, дальше 1, 2 и т. д. Я взглянул на номер своего кресла; он оказался равным 66. а) Проехал ли я половину пути? б) Если нет, то при встрече с каким креслом я проеду половину пути?*

**Решение.** Всего кресел 96, а половина пути составляет 48 кресел. Я окажусь посередине канатной дороги в тот момент, когда количество кресел впереди и сзади меня окажется одинаковым. Для этого нужно, чтобы номер встречного кресла был равен  $66 - 48 = 18$ . Поскольку встреча с креслом номер 18 у меня впереди, я не проехал половину пути. *Ответ:* а) не проехал; б) 18.

**Домашнее задание**

1. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова – Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?

2. Ниф, Наф и Нуф подружились с Серым Волком. Все четверо стали заядлыми филателистами. Волк собирает фауну, один из поросят – флору, другой – спорт, третий – космос. Вся четверка собралась за столом в доме Волка. Волк сидит слева от Нафа, Ниф – справа от собирателя космоса, Нуф сидит напротив Нафа и не интересуется

спортивной тематикой. Какие марки собирает Ниф?

3. Девочка выложила по окружности 20 камешков – 10 серых и 10 белых и, двигаясь по окружности в одном направлении, брала каждый седьмой камешек. Через некоторое время все серые камешки были взяты, а все белые остались. В каком порядке были выложены серые и белые камешки?

4. 100 ребят стоят по кругу. Они выбирают водящего следующим образом: первый остается в круге, второй выходит из круга, третий остается, четвертый выходит и т. д. Круг все время сужается, пока в нем не останется один человек. На каком месте он стоял в первоначальном круге?

5. Числа от 1 до 1000 выписаны по порядку по окружности. Начиная с первого, вычеркивается каждое пятнадцатое число (т. е. числа 1, 16, 31 и т. д.), причем при повторных оборотах числа снова считаются. Сколько останется незачеркнутых чисел?

### Формула включений и исключений

Познакомимся с задачами, при решении которых используются круги Эйлера.

**Пример 1.** В одном бурятском улусе каждый житель говорит или по-бурятски, или по-русски, или на обоих языках. 912 жителей села говорят по-бурятски, 653 — по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом улусе?

**Решение.** Применим круги Эйлера. Через  $A$  обозначим множество жителей улуса, которые говорят по-бурятски, через  $B$  — множество жителей, которые говорят по-русски.

Будем обозначать число элементов любого конечного множества  $A$  через  $n(A)$ . Тогда по условию

$$n(A)=912, n(B)=653, n(A \cap B)=435.$$

Нам нужно найти число элементов в объединении множеств  $A$  и  $B$ .

Прежде всего сложим числа  $n(A)$  и  $n(B)$ . Но при этом элементы, входящие в пересечение множеств  $A$  и  $B$ , считаются дважды. Следовательно, из этой суммы нужно вычесть  $n(A \cap B)$ . Получаем:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1)$$

Подставим в формулу (1) значения  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(A \cap B)$ :

$$n(A \cup B) = 912 + 653 - 435 = 1130.$$

**Ответ:** 1130.

**Методическое замечание.** Заострить внимание учащихся на том, что формула (1) справедлива не только при условиях данного примера, но и для любых двух конечных множеств  $A$  и  $B$ .

**Пример 2.** Большая группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским – 13, немецким – 10, английским и французским – 8, английским и немецким – 6, французским и немецким – 5, всеми тремя языками – 2, а 41 человек не владеет ни одним из этих трех языков. Сколько туристов в группе?

**Решение.** Обозначим множество туристов группы, которые владеют английским, французским или немецким языком, соответственно через  $A$ ,  $B$  и  $C$ . По условию

$$n(A) = 28, n(B) = 13, n(C) = 10, n(A \cap B) = 8, n(A \cap C) = 6, n(B \cap C) = 5, n(A \cap B \cap C) = 2.$$

Сначала найдем число туристов, которые владеют, по меньшей мере, одним из трех иностранных языков, т. е.  $n(A \cup B \cup C)$ . Для этого применим круги Эйлера.

Подсчитаем сумму  $n(A) + n(B) + n(C)$ . Так как в нее каждое из чисел  $n(A \cap B)$ ,  $n(A \cap C)$  и  $n(B \cap C)$  вошло слагаемым два раза, то от этой суммы нужно отнять сумму  $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$ .

Теперь выясним, сколько раз в полученное выражение

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

входит слагаемым число  $n(A \cap B \cap C)$ . Оно входит в эту сумму три раза со знаком плюс (в каждое из слагаемых  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(C)$  и три раза со знаком минус (в каждое из слагаемых  $n(A \cap B)$ ,  $n(A \cap C)$  и  $n(B \cap C)$ ). Следовательно, для того чтобы не потерять тех туристов, которые входят во множество  $A \cup B \cup C$ , нужно еще прибавить число  $n(A \cap B \cap C)$ . Получаем:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \quad (2)$$

Тогда будем иметь:

$$n(A \cup B \cup C) = 28 + 13 + 10 - 8 - 6 - 5 + 2 = 34.$$

Таким образом, общее число туристов группы равно  $34 + 41 = 75$ . *Ответ: 75.*

**Замечание.** Заострить внимание учащихся на том, что формула (2) справедлива для любых трех конечных множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

#### Домашнее задание.

1. Множество  $A$  имеет 100 элементов, являющихся натуральными числами, каждое из которых делится или на 2, или на 3, причем 70 элементов из  $A$  делятся на 2 и 48 – на 3. Сколько элементов множества  $A$  делятся на 6?

2. В течение некоторого времени число дождливых дней было равно 10, ветреных – 8, холодных – 6, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 4, ветреных и холодных – 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных – 1. Сколько было всего дней с плохой погодой?

3. Контрольная работа по математике в пятом классе состояла из задачи, уравнения и числового примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение – 4, только пример – 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение – 5, только пример – 3. Остальные ученики выполнили всю работу правильно. Сколько таких учеников?

4. Пол комнаты площадью  $18 \text{ м}^2$  покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра –  $6 \text{ м}^2$ , другого –  $5 \text{ м}^2$  и третьего –  $4 \text{ м}^2$ . Каждые два ковра перекрываются на площади  $1 \text{ м}^2$ , причем все три ковра перекрываются на площади  $0,5 \text{ м}^2$ . Какова площадь части пола, не покрытой коврами?

### 7 класс

#### 1. Задачи, решаемые с помощью схем и таблиц

##### *Емкости и переливания*

Многие олимпиадные задачи начинаются со слов: «Можно ли...». При этом существует две возможности:

– ответ в задаче – нельзя, и тогда нужно доказать, *почему* нельзя;

– ответ – можно, и тогда нужно построить *пример* и показать, что он удовлетворяет условию задачи.

Точно так же часто ответом на вопрос: «Всегда ли...» или «Всякий ли...» является конкретный пример, когда это условие не выполняется.

Типичный пример таких задач – задачи на переливания. Они традиционно вызывают интерес у младших школьников и трудности с записью решения. Поэтому учителю нужно обратить особое внимание на рациональную запись решения (в виде схемы или таблицы).

**Пример 1.** Можно ли, имея лишь два сосуда 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 л воды?

**Решение.** Пусть «н» обозначает «налить из водопровода сосуд доверху», «п» – «перелить из сосуда 3 л в сосуд 5 л», «в» – «вылить всё из сосуда».

Сосуд 3	0	н	3	п	0	н	3	п	1		1	п	0	н	3	п	0
Сосуд 5	0		0		3		3		5	в	0		1		1		4

В результате в сосуде вместимостью 5 л оказалось 4 л воды.

**Методическое замечание.** Можно и не писать действия, достаточно следить за объёмом воды в каждом сосуде. Можно, наоборот, описывать процесс переливания не в таблице, а словами.

**Пример 2.** Даны три сосуда на 3,5 и 8 литров соответственно. В 8-ми литровом сосуде 8 литров жидкости. С помощью переливаний, удовлетворяющих следующим правилам, получить в каком-нибудь из сосудов 4 литра жидкости:

- Переливать можно только полностью всю жидкость, или столько, сколько влезает в сосуд;
- Выливать жидкость вне сосуда нельзя;
- Наливать жидкость извне нельзя.



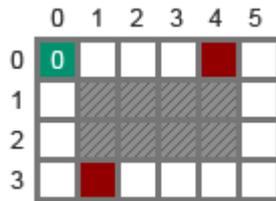
Граф будем задавать в виде таблицы, описывающей количество жидкости в 3-х и 5-ти литровых сосудах. Количество жидкости в 8-ми литровом сосуде вычисляется вычитанием.

Первоначально таблица выглядит так:

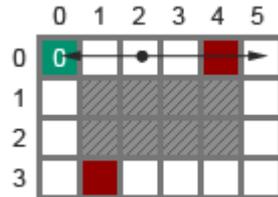
	0	1	2	3	4	5
0	0					
1						
2						
3						

Здесь зеленая позиция – исходное состояние или нулевое, а красные – это то, куда мы должны попасть. Теперь о правилах передвижения в этой таблице:

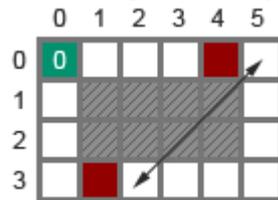
1. Переливать мы можем только полностью, так что задействованы будут только «края» таблицы



2. Направление для переливания  $3 \Rightarrow 8$  или же  $8 \Rightarrow 3$  вертикально, т.е. не затрагивается количество в 5-ти литровом сосуде
3. Направление для переливания  $5 \Rightarrow 8$  или же  $8 \Rightarrow 5$  горизонтально, т.е. не затрагивается количество в 3-х литровом сосуде соответственно

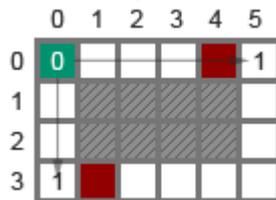


4. Направление для переливания  $5 \Rightarrow 3$  или же  $3 \Rightarrow 5$  по побочной диагонали, т.е. так, чтобы количество жидкости в 8-ми литровом сосуде не менялось

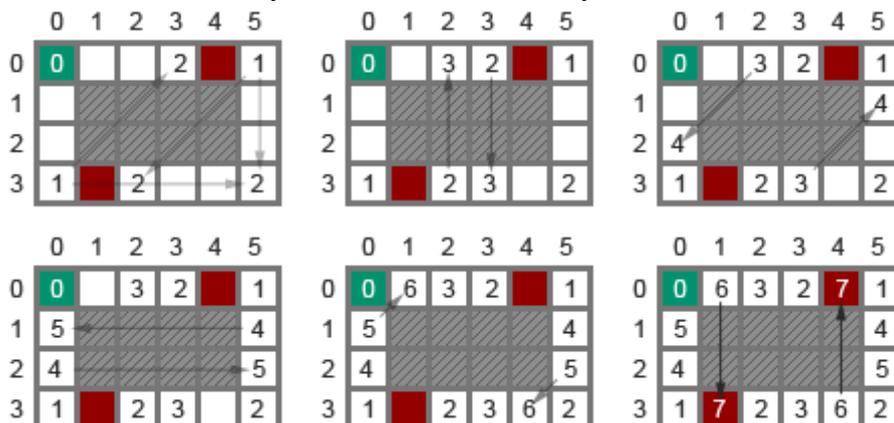


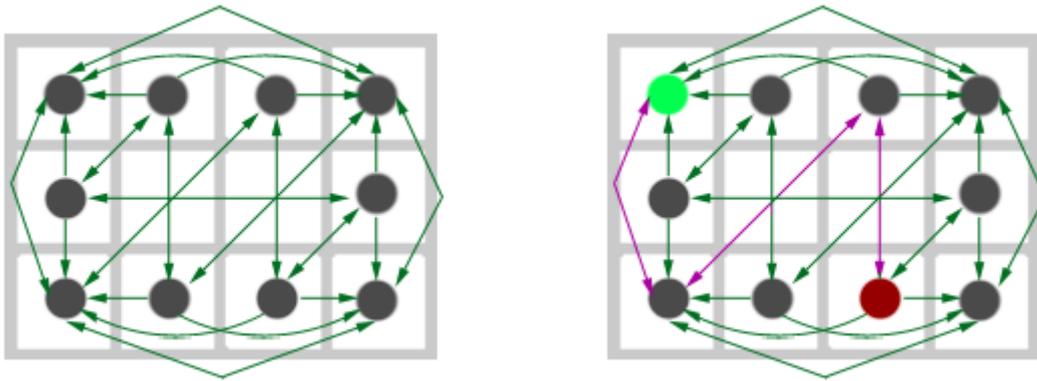
Теперь примемся за заполнение таблицы. Клетки таблицы будем заполнять таким образом, что бы в клетке был номер соответствующий минимальному количеству переливаний, за которое можно достичь этого состояния.

Из точки (0, 0) мы можем попасть в точку (3, 0) или же (0, 5), поставим там цифры **1**:



Продолжим заполнять таблицу, пока не достигнем нужной нам ячейки:





Приведена маленькая таблица для удобства иллюстрирования графа.

Теперь еще несколько нюансов:

- А что, если воды будет дано больше, чем помещается в рассматриваемых сосудах (для этой задачи, например, девять)?  
Тогда в таблице будет недоступна клетка (0, 0), если еще меньше, то отсеется еще две клетки по побочной диагонали:

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						

- А что, если будет наоборот – воды дано меньше?  
Тогда отсекаются клетки будут из противоположного угла:

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						

Так же с помощью этой таблицы или графа можно легко вычислить, что переливание будет недостижимо.

### Домашнее задание

1. Даны два кувшина вместимостью 8 и 5 литров. Имеется кран с водой и мойка для слива воды. Как с помощью этих двух кувшинов отмерить ровно 6 литров воды?
2. Бидон емкостью 9 литров заполнен молоком, бидоны объемом 8 литров и 5 литров пусты. Требуется получить 6 литров молока.
3. Даны три сосуда на 3,5 и 8 литров соответственно. В 8-ми литровом сосуде 8 литров жидкости. С помощью переливаний разлить воду поровну в два больших сосуда.
4. В бочке находится не менее 13 ведер бензина. Как отлить из нее ровно 8 ведер бензина с помощью двух пустых девятиведерного и пятиведерного бидонов?
5. В бидоне находится 18 литров подсолнечного масла. Имеются два пустых ведра объемом по 7 л, в которые нужно налить по 6 л масла. Кроме того, есть черпак объемом 4 л. Как можно выполнить разлив?

### 3. Задачи на маневрирование

**Пример 1.** Фермеру необходимо переправить через широкую реку капусту, козу и волка. Но беда в том, что в лодке с человеком есть одно место или для капусты, или для козы, или для волка. Если фермер оставит козу с волком, то волк может съесть козу, а если оставить капусту с козой, то она может съесть капусту. В присутствии фермера никто никого не ест. Подскажите ему способ переправы на другой берег?

**Решение.** Опишем организацию перевозки с левого берега на правый волка, козла и капусты, при которой без присмотра не будут оставаться одновременно волк с козлом или козел с капустой.

В первом рейсе перевозчик берет с собой козла, оставляя на левом берегу волка и капусту. Переехав на правый берег, перевозчик оставляет там козла и возвращается на левый берег.

Во втором рейсе перевозчик берет с собой волка, оставляя на левом берегу капусту. Переехав на правый берег, перевозчик оставляет там волка, забирает с собой козла и возвращается с ним на левый берег.

В третьем рейсе перевозчик берет с собой капусту, оставляя на левом берегу козла. Переехав на правый берег, оставляет там капусту (с волком) и возвращается на левый берег.

И, наконец, в четвертом рейсе он перевозит с левого берега на правый козла.

**Пример 2.** Отряд солдат подходит к реке, через которую надо переправиться. Но мост сломан, а река глубока. Вдруг командир замечает двух мальчиков, которые катаются на лодке недалеко от берега. Но лодка так мала, что может выдержать только одного солдата или только двух мальчиков – не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Как это было сделано?

**Решение.** Дети переехали реку. Один из мальчиков остался на берегу, а другой пригнал лодку к солдатам и вылез. После этого в лодку сел солдат и переправился на другой берег. Мальчик, оставшийся там, пригнал лодку обратно к солдатам, взял своего товарища, отвёз на другой берег и снова доставил лодку обратно, после чего вылез, а в неё сел другой солдат и переправился через реку. Таким образом, после каждых двух перегонов лодки через реку и обратно переправлялся один солдат. Так повторялось столько раз, сколько было солдат

**Пример 3.** Трое туристов должны перебраться с одного берега реки на другой. В их распоряжении старая лодка, которая может выдержать нагрузку всего в 100 кг. Вес одного из туристов 45 кг, второго – 50 кг, третьего – 80 кг. Как должны они действовать, чтобы перебраться на другой берег?

**Указание.** Туристы могут начать с того, что двое с меньшим весом садятся в лодку и переправляются на противоположный берег, после чего один из них пригоняет лодку обратно.

**Решение.** Туристы могут действовать так: 1) два с меньшим весом садятся в лодку и переправляются на противоположный берег; 2) один из них пригоняет лодку обратно; 3) наиболее тяжёлый турист садится в лодку и переправляется; 4) второй лёгкий садится в лодку и пригоняет её назад; 5) два лёгких садятся в лодку и окончательно переправляются на нужный берег.

**Ответ.** Переправляются два лёгких; один из них пригоняет лодку обратно; переправляется тяжёлый; второй лёгкий пригоняет лодку обратно; снова переправляются два лёгких.

### Домашнее задание

1. Три рыцаря, у каждого из которых был свой оруженосец, съехались на берегу реки, к которому была привязана двухместная лодка. Их лошади переправились вплавь, а людей ждала лодка. Но оруженосцы, словно сговорившись, не захотели оставаться на берегу в компании незнакомых рыцарей. И уговоры и угрозы не помогли. Тогда оруженосцы подумали и нашли способ переправиться не нарушая требование оруженосцев. Как они это сделали?
2. Можно ли рыцарям переправиться при этих же условиях, если съедутся 4 рыцаря и 4 оруженосца?
3. К реке подошли 4 рыцаря и 4 оруженосца, но лодка оказалась трехместной. Можно ли осуществить переправу с теми же условиями оруженосцев?
4. К берегу реки подошли 3 контрабандиста с двумя мешками золота каждый. У берега нашлась трехместная лодка, в которую помещались любые три мешка, или контрабандист + 2 мешка, или 2 контрабандиста + 1 мешок или 3 контрабандиста. Каждый из преступников не может оставить ни один из своих мешков наедине с другими преступниками, но может их оставить на безлюдном берегу. Могут ли все они переправиться через реку?

### Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре рыцаря с оруженосцами хотят переправиться через глубокую реку на лодке без гребца, вмещающая не более двух человек. Недалеко от места переправы есть островок, на котором можно высаживаться. Как можно переправиться с условием, что нигде (ни на берегах, ни в лодке, ни на острове) ни один оруженосец не находился в компании чужих для него рыцарей?
2. Поезд М приближается к железнодорожной станции и его обгоняет быстро едущий поезд из города N, который нужно пропустить вперед. От главного пути, около станции, отходит боковая ветка – тупик, на которую временно можно оттащить вагоны с главного пути, но она так мала, что может вместить весь поезд М. Как можно пропустить поезд N вперед?
3. По речному каналу один за другим плывут три парохода: M;N и K. Навстречу им плывут еще три парохода, идущие также один за другим: P;H и E. Канал такой ширины, что два парохода не могут в нем разъехаться, но в конце одной из сторон канала есть карман в виде залива. В него можно отвести только один из пароходов. Могут ли эти пароходы разъехаться около этого кармана?

## 4. Задачи, решаемые с помощью графов

### Метод построения дерева решения комбинаторных задач

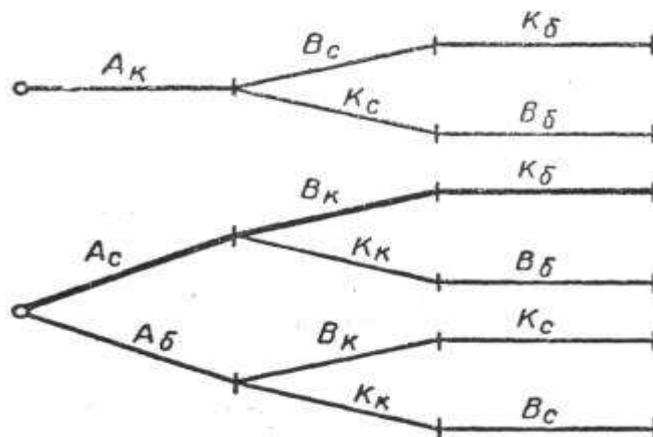
**Пример 1.** В столовой на горячее можно заказать щуку, грибы и баранину, на гарнир – картофель и рис, а из напитков – чай и кофе. Сколько различных вариантов обедов можно составить из указанных блюд?

**Решение.** Так как горячих блюд три, то поставим три точки. Каждую точку обозначим первой буквой названия блюда. От этих точек проведем по две линии вниз и поставим точки, т.к. гарниров два. Их также обозначим первыми буквами названий. От каждого гарнира также проведем по две линии, точки будут обозначать напиток. Каждый путь

по этому графу соответствует одному из способов выбора. Число таких путей будет соответствовать числу точек в нижнем ряду. Сосчитаем точки третьего ряда на нашем графе. Их 12, значит, можно составить 12 различных обедов.

**Пример 2.** Три ученицы – Аня, Варя и Клава – на первомайской демонстрации были: одна в красном, другая в белом, третья в синем платье. В высказывании: Аня была в красном платье, Варя не в красном, Клава не в синем – одна часть верна, а две неверны. В каком платье была каждая из учениц?

**Решение.** Будем исходить из двух возможностей: Аня была в красном платье ( $A_k$ ) и Аня была не в красном (то есть в белом или синем) и изобразим эти возможности: первую ребром  $A_k$ , а вторую двумя ребрами  $A_c$  и  $A_b$ , исходящими из одной точки. Если Аня была в красном платье, то в синем могла быть или Варя, или Клава. По этому к ребру  $A_k$  присоединим 2 ребра  $B_c$  и  $K_c$ . Путь  $A_k B_c$  закончим  $K_b$ , а путь  $A_k K_c$  закончим  $B_b$ . Но из двух получившихся путей условию задачи ни один не удовлетворяет.



Обратимся ко второй возможности. К ребру  $A_c$  присоединим два ребра  $B_k$  и  $K_k$ , так как в красном платье в этом случае могла быть Варя или Клава. Такие же два ребра присоединим к  $A_b$ . Закончить каждый из получившихся путей очень просто: нужно присоединить последовательно ребра  $K_b$ ,  $B_b$ ,  $K_c$  и  $B_c$ . Имеем четыре логические возможности, но условию задачи удовлетворяет лишь путь  $A_c B_k K_b$ , а остальные три пути – не удовлетворяют. Значит, Аня была в синем платье, Варя – в красном, а Клава – в белом.

### Домашнее задание

1. У Юры 2 пирамидки, 3 мяча и 2 конструктора. Он хочет выбрать из этих игрушек одну пирамидку, один мяч и один конструктор. Сколькими способами он это может сделать?