Министерство образования Иркутской области
Департамент образования города Иркутска
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей ИГУ города Иркутска
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

РАССМОТРЕНО
на заседании методического
объединения учителей математики
от 29.08.2023г. протокол №1.
Руководитель МО И.Л. Коваленок

УТВЕРЖДЕНО
Приказ № 01-06-140 от
30.08.2023 г.
Директор Е.Ю. Кузьмина

ПРИНЯТО
решением педагогического совета
от 30.08.2023 г., протокол №1

ID -

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ
ГОРОДА ИРКУТСКА

Подписано цифровой подписью: МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА
DN: c=RU, st=ИРКУТСКАЯ ОБЛАСТЬ, street=УЛ. АКАДЕМИКА КУРЧАТОВА Д. 13А, l=Г. ИРКУТСК, title=Директор, o=МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА, 1.2.643.100.1=120D31303533383132303530343031, 1.2.643.100.3=120B3033393439323137353835, 1.2.643.100.4=120A33383132303833333032, 1.2.643.3.131.1.1=120C333831323533313438323439, email=ligu_irk@mail.ru, givenName=Елена Юрьевна, sn=Кузьмина, cn=МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА
Дата: 2023.09.12 20:56:21 +08'00'

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ID –

учебного курса

«Решение олимпиадных задач по математике для 7 классов»

Срок освоения – 1 год

Уровень сложности программы УГЛУБЛЕННЫЙ

Количество часов по программе за весь период реализации - 34

Составители программы: Кузьмин О.В., доктор физ.-мат. наук,
профессор, Заслуженный учитель РФ,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска;

г. Иркутск, 2023 год

АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ
учебного курса «Решение олимпиадных задач по математике»

Рабочая программа «Решение олимпиадных задач по математике» (7 класс) разработана в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования и Положением «О рабочих программах учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в соответствии с требованиям ФГОС и ФОП основного общего образования» МАОУ Лицея ИГУ г.Иркутска,, утвержденного приказом директора 01-06-132 от 30.08.2023 года и является частью основной образовательной программы основного общего образования.

Рабочие программы ориентирована на целевые приоритеты, сформулированные в федеральной рабочей программе воспитания и в рабочей программе воспитания МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска.

Обучение математике направлено на совершенствование нравственной и коммуникативной культуры обучающегося, развитие его интеллектуальных и творческих способностей, мышления, памяти и воображения, навыков самостоятельной учебной деятельности, самообразования.

Содержание математике ориентировано также на развитие функциональной грамотности как интегративного умения человека читать, понимать тексты, использовать информацию текстов разных форматов, оценивать ее, размышлять о ней, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни.

Изучение математике направлено на достижение следующих целей:

В направлении личностного развития: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способностей к умственному эксперименту, интереса к математическому творчеству; формирование качеств, необходимых для адаптации в современном информационном обществе, способностей к преодолению мыслительных стереотипов.

В метапредметном направлении: формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения смежных дисциплин и продолжения обучения в профильных классах Лицея ИГУ; создание фундамента для математического развития одаренных детей.

Рабочая программа учебного предмета «Решение олимпиадных задач по математике» входит в обязательную предметную область «Математика и информатика»

Срок реализации программы – 1 год.

Количество учебный часов, на которые рассчитана программы

	7 класс	Всего
Количество учебных недель	34	34
Количество часов в неделю	1 ч/нед	
Количество часов в год	34	34

Для реализации программ используются учебники, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, приказом Минпросвещения от 21.09.2022 № 858:

1. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра. 7 класс, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ,
2. Петерсон Л.Г. Математика в 3-х частях. – М. Изд-во «Ювента», 136 с.
3. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре 8-9 / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – М. : Просвещение,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. http://katalog.iot.ru - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;

2. http://www.edu.ru - Федеральный образовательный портал;
3. http://school-collection.edu.ru - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. http://window.edu.ru - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :http://www.kokch.kts.ru/cdo/
6. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: http://teacher.fio.ru
7. Новые технологии в образовании: http://edu.secna.ru/main/
8. Путеводитель «В мире науки» для школьников:http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/
9. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: http://mega.km.ru
10. сайты «Энциклопедий», например:http://www.rubricon.ru/ http://www.encyclopedia.ru/

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочные и методические материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

Содержание программы

Раздел 1. Делимость и простые числа (6 часов)

Деление с остатком. Задачи на применение признаков делимости. Общие делители и общие кратные.

Алгоритм Евклида. Теорема о простом делителе. Основная теорема арифметики.

Раздел 2. Уравнения в целых числах и методы их решения (4 часа)

Решение линейных уравнений с двумя переменными.

Раздел 3. Задачи на сложные проценты (4 часа)

Задачи на проценты. Банковские проценты.

Раздел 4. Логические задачи (4 часа)

Решение логических задач составлением таблиц.

Решение логических задач с помощью схем.

Задачи с конечными множествами. Задачи о лгунах.

Раздел 5. Олимпиадные задачи по арифметике (5 часов)

Степень. Степенные выражения. Формулы сокращенного умножения. Нахождение значений выражений на применение формул сокращенного умножения.

Упрощение выражений и вычисление их значений.

Раздел 6. Решение текстовых (сюжетных) задач (5 часов)

Задачи на составление уравнений. Задачи на части. Решение задач на пропорциональное деление, отношение двух чисел.

Задачи на совместную работу. Смешанные задачи.

Раздел 7. Принцип Дирихле и его применение при решении задач (5 часов)

Понятие о принципе Дирихле. Решение простейших задач на применение принципа Дирихле.

Принцип Дирихле в задачах с «геометрической» направленностью.

Итоговое занятие (1 час)

Демонстрация презентаций, защита проектов, выполненных учащимися.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Раздел 1. Делимость и простые числа	**6**	
1	Деление с остатком	1	
2	Задачи на применение признаков делимости	1	
3	Общие делители и общие кратные	1	
4	Алгоритм Евклида	1	
5	Теорема о простом делителе	1	
6	Основная теорема арифметики	1	
	Раздел 2. Уравнения в целых числах и методы их решения	**4**	
7	Линейные уравнения с двумя переменными	1	
8 - 10	Решение линейных уравнений с двумя переменными	3	
	Раздел 3. Задачи на сложные проценты	**4**	
11	Сложные проценты	1	
12	Задачи на сложные проценты	1	
13	Банковские проценты	1	

14	Контрольный урок		1
	Раздел 4. Логические задачи	**4**	
15	Решение логических задач составлением таблиц	1	
16	Решение логических задач с помощью схем	1	
17	Задачи с конечными множествами	1	
18	Задачи о лгунах	1	
	Раздел 5. Олимпиадные задачи по арифметике	**5**	
19	Степень. Степенные выражения	1	
20	Формулы сокращенного умножения.	1	
21	Нахождение значений выражений на применение формул сокращенного умножения	1	
22	Упрощение выражений и вычисление их значений	1	
23	Контрольный урок		1
	Раздел 6. Решение текстовых (сюжетных) задач	**5**	
24	Задачи на составление уравнений	1	
25	Задачи на части	1	
26	Решение задач на пропорциональное деление, отношение двух чисел	1	
27	Задачи на совместную работу	1	
28	Смешанные задачи.	1	
	Раздел 7. Принцип Дирихле и его применение при решении задач	**6**	
29	Понятие о принципе Дирихле	1	
30, 31	Решение простейших задач на применение принципа Дирихле	2	
32	Принцип Дирихле в задачах с «геометрической» направленностью	1	
33	Контрольный урок		1
34	Защита творческой работы		1

Планируемые результаты освоения учащимися учебного предмета

Личностные результаты освоения программы по математике характеризуются в части:

1) патриотического воспитания:

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

2) гражданского и духовно-нравственного воспитания:

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

3) трудового воспитания:

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

4) эстетического воспитания:

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

5) ценностей научного познания:

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением навыками исследовательской деятельности;

6) физического воспитания, формирования культуры здоровья и эмоционального благополучия:

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

7) экологического воспитания:

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

8) адаптации к изменяющимся условиям социальной и природной среды:

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

Личностные результаты:

1) коммуникативная компетентность в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности;
2) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;
3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
4) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
5) креативность мышления, инициативы, находчивости, активности при решении различных комбинаторных и логических задач;

Метапредметные результаты:

1) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;
2) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;
3) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;
4) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;

5) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);

8) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;

9) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

10) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;

11) понимание сущности алгоритмических предписаний и умения действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

12) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

13) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

Предметные результаты:

Учащийся научится:

- Различию между примером и доказательством;
- методу доказательства от противного;
- решать простейшие задачи на применение принципа Дирихле;
- использовать основные свойства делимости;
- применять сложные проценты в простейших ситуациях;
- применять основную теорему арифметики;
- строить и применять простейшие логические схемы и таблицы.
- различать основные типы олимпиадных задач по арифметике;
- стандартные способы решение текстовых (сюжетных) задач;
- простейшие методы решения линейных уравнений в целых числах;

Учащийся сможет научиться:

- решать одну и ту же задачу различными методами;
- алгоритму Евклида.
- решать задачи о сложных и банковских процентах;

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Делимость и простые числа

Методическое замечание. На первом занятии по теме «Делимость и простые числа» следует сформулировать и на примерах пояснить основную теорему арифметики, а также вспомнить признаки делимости на 2, 5, 10, 4, 25, 3, 9, 11.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ: *Натуральное число раскладывается на произведение простых множителей единственным образом, с точностью до порядка множителей.*

Пример 1. В таверне было 6 ящиков яблок, масса которых равна соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 кг. Две ковбойские фирмы приобрели 5 ящиков, причем одна из них взяла в два раза больше яблок (по массе), чем другая. Какой ящик остался в таверне?

Решение. Поскольку одна фирма купила вдвое больше яблок, чем другая, общая масса купленных яблок должна делиться на 3 (тогда две трети купит первая компания и ещё треть – вторая). Общая масса всех яблок в таверне равна $15 + 16 + 18 + 19 + 20 + 31 = 119$ кг. Осталось определить, какое из чисел 15, 16, 18, 19, 20 и 31 нужно отнять от 119, чтобы получилось число, кратное трём. Нетрудно убедиться, что это может быть только число 20.

Ответ. Ящик массой 20 кг.

Пример 2. Ковбой Джо зашел в бар. Он купил бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и девять коробок непромокаемых спичек. Бармен сказал: «С вас 11 долларов 80 центов за всё». Вместо ответа Джо выхватил револьвер. Почему он решил, что его пытаются надуть?

Указание. У всех покупок, которые сделал Джо, либо цена (3 и 6 долларов), либо количество (3 пачки и 9 коробок) делится на 3. Может ли так получиться, что общая стоимость покупки на 3 не делится?

Пример 3. Билл и Джек купили одинаковые револьверы. Билл платил только 3-долларовыми купюрами, а Джек – 4-долларовыми. Общее количество банкнот, которое они отдали, не превосходит 13. Сколько стоит револьвер?

Указание. Так как за револьвер можно заплатить 3-долларовыми купюрами, то его цена делится на 3. Точно так же цена револьвера делится на 4. Значит, цена револьвера делится на 12. Если бы цена была больше 12 долларов, то сколько купюр заплатили бы Билл и Джек?

Ответ. 12 долларов.

Пример 4. Ковбой Билл играл на одноруком бандите. Если выпадают "три семёрки", то он выигрывает 80 долларов, а если "три яблока", то 24 доллара. Любая другая комбинация –
проигрыш. Билетик для игры стоит 4 доллара. Однажды он похвастался: "Я начал с 10 долларов, а через час у меня была тысяча!" Могло ли так быть?

Указание. Докажите, что выигрыш Билла обязательно должен делится на 4. А по его словам, он выиграл 990 долларов.

Пример 5. У ковбоя Билла 180 коров. Сколькими способами он может разделить своё стадо на несколько одинаковых стад?

Указание. Если 180 делится на какое-нибудь число то 180 коров можно разбить на группы по k коров. Посчитайте k, , сколько различных делителей у числа 180.

Ответ. 18 способами.

Пример 6. Джо и Джек играют в такую игру: Джек называет три цифры, а Джо должен из них составить однозначное, двузначное или трёхзначное число, делящееся на три. Если это ему удаётся, Джек отдает 12 долларов, а если нет, Джо отдаёт 1000 долларов. За кого бы вы играли в эту игру?

Решение. Постараемся найти три цифры, которые бы подошли Джеку. Эти цифры не должны делиться на 3. Значит, их остатки при делении на 3 равны либо 1, либо 2. Если у всех трёх чисел остатки одинаковые, то любое трёхзначное число, составленное из этих цифр, делится на 3. (Почему?) Если же у двух из них остатки разные, то, любое двухзначное число, составленное из этих двух цифр, делится на 3. (Почему?)

Ответ. Из любых трёх цифр можно составить либо одно-, либо двух-, либо трёхзначное число, которое делится на 3. Так что лучше играть за Джо.

Пример 6. В банк Сакраменто можно положить за один раз 120 долларов или снять 300 долларов. У Билла есть 1000 долларов. Какую максимальную сумму он может положить в банк за несколько визитов?

Указание. Числа 300 и 120 делятся на 60, значит, сумма, которую можно положить в банк, тоже делится на 60. Наибольшее такое число, меньшее 1000, равно 960. Поэтому больше 960 долларов Билл в банк положить не сможет. Однако, то, что 960 долларов положить можно, ещё не доказано. Покажем цепочку визитов Билла в банк, приводящих к указанной сумме: 120*5 – 300 + 120*5 – 300 + 120*3 = 960. Возможны и другие решения.

Ответ. 960 долларов.

Пример 7. Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня у Робинзона *тяжёлый день*: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий *тяжёлый день*?

Решение. Поскольку Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты, а каждый пятый день ходит на охоту, промежуток между двумя тяжёлыми днями должен состоять из числа дней, кратного 2, 3 и 5. Нас интересует следующий тяжёлый день, поэтому нужно выбрать наименьшее из таких чисел. Это число 30 = 2*3*5 = НОК(2, 3, 5).

Ответ. Через 30 дней.

Пример 8. Вершины тысячеугольника занумерованы по порядку числами от 1 до 1000. Банкир Джон отмечает каждую пятнадцатую вершину, начиная с первой (то есть вершины с номерами 1, 16, 31, 46 и т.д.). Так он делает до тех пор, пока не дойдёт до уже отмеченной вершины. Сколько вершин тысячеугольника останутся неотмеченными?

Решение. Будем выписывать номера отмеченных вершин. Первые из них делятся на 15 с остатком 1: это 1, 16, 31, ..., 991. Дальше будет 6 и другие номера, делящиеся на 15 с остатком 6: это 6, 21, 36, ..., 996. Дальше будет 11 и другие номера, делящиеся на 15 с остатком 11: это 11, 26, 41, ..., 986. А потом – снова 1, и больше никакие вершины отмечены не будут. Если аккуратно посчитать (проделайте это!), отмеченных вершин получится 200 штук, а неотмеченных – 800.

Ответ. 800.

Домашнее задание

1. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

2. Существуют ли такие три числа, что их попарные наибольшие общие делители равны 1, 2 и 3?

3. Допишите к числу 523... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9. Сколько всего таких чисел существует?

4. Вася берёт любое трёхзначное число, вычитает из него число, записанное теми же цифрами в обратном порядке и утверждает, что разность делится на 9. Прав ли он?

5. Настя заметила, что 555*37 и 777*37. Сформулируйте общее утверждение и докажите его.

Задачи для самостоятельного решения

1. а) Маша показывает такой фокус: ей называют любое трёхзначное число, она приписывает к нему такое же, а потом в уме за секунду делит получившееся шестизначное число на 1001. Как она это делает?

б) Саша заметила, что все шестизначные числа Маши делятся на 7. Почему? На какие ещё два простых числа они делятся? Найдите как можно больше делителей.

2. Мама послала Васю в магазин купить кефира по 22 руб. насколько хватит денег. На сдачу Вася хочет купить себе леденцов по 5 руб. На какое наибольшее количество леденцов он может рассчитывать?

3. Коля заметил, что числа 11, 1001, 100001 делятся на 11. Сформулируйте и докажите общую закономерность.

4. Петя заметил, что число a^5 оканчивается на ту же цифру, что и a. Для всех ли натуральных чисел это верно? В каких системах счисления это верно? Для каких ещё степеней это верно?

5. Вася взял большое число. С помощью признака делимости на 3 он проверил, что число делится на 3. Далее с помощью признака делимости на 9 он проверил, что это число делится на 9. Отсюда он сделал вывод, что это число делится на 27. Прав ли Вася?

6. Коля считает, что если число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27. Петя считает, что верно обратное утверждение. Правы ли они?

2. Уравнения в целых числах и методы их решения

Пример 1. Расстояние между двумя населёнными пунктами А и Б равно 65 км. Пешеход вышел из А в Б ровно в 12 часов. Через час из пункта Б в А выехал велосипедист. Ровно через 3 часа, как выехал велосипедист, они встретились. Вычислите скорости пешехода и велосипедиста.

Решение. Сначала составим математическую модель этой ситуации:

1. Обозначим скорость пешехода через x, а скорость велосипедиста через y.
2. Путь, который прошел пешеход, равен 4 **x**.
3. Путь, который проехал велосипедист, равен 3y.
4. Составляем математическое выражение:

$$4\,x + 3\,y = 65$$

или

$$4\,x + 3y - 65 = 0.$$

В данном случае, если взять пару чисел 5 и 15, получаем верное равенство. Действительно, при подстановке в уравнение получаем:

$$4*5 + 3*15 - 65 = 0.$$

Ещё говорят, что числа 5 и 15 удовлетворяют уравнению.

Пример 2. На складе имеются гвозди в ящиках по 16, 17 и 40 кг. Может ли кладовщик выдать 100 кг. гвоздей, не вскрывая ящиков?

Решение. Пусть ящиков по 16 кг будет x штук, по 17 кг – y штук, по 40 кг – z штук. Всего выдано 100 кг, отсюда уравнение:

$$16\,x + 17\,y + 40\,z = 100.$$

Ящиков по 40 кг не может быть больше двух, ибо $40 \cdot 3 = 120$, это больше чем надо. И два тоже быть не может, ибо 40*2 = 80, 100 – 80 = 20, а 20 кг можно набрать, только вскрыв, хотя бы один ящик. Может быть, взять один ящик по 40 кг, а оставшиеся 60 кг набрать, комбинируя ящики по 16 и 17 кг: если взять один ящик 17 кг., то останется 43 кг и набрать по 16 кг невозможно, если взять 2 ящика по 17 кг, то 60 – 17*2 = 26 и целых ящиков по 16 кг не получится, если же взять 3 ящика по 17 кг, то останется 9кг., которые придется выдавать, вскрыв какой-нибудь ящик. Получается, что ящики по 40 кг нам вовсе не нужны. Если задача имеет решение, то комбинировать придется ящики только по 16 и 17 кг. Значит, получается уравнение:

$$16\,x + 17\,y = 100,$$

решая которое методом полного перебора возможных вариантов, находим решение (2,4).

Ответ: да, может – 4 ящика по 17 кг и 2 ящика по 16 кг.

Пример 3. В загоне находятся одноглавые сороконожки и трехглавые змеи. Всего у них 298 ног и 26 голов. Сколько ног у трехглавых змей?

Решение. *Обозначим за x число сороконожек, а за y – трехглавых змей, тогда голов 3y + x = 26.*

Пусть z – количество ног у одного змея, тогда всего ног z y+ 40 x = 298.

Имеем систему уравнений:

$$3\,y + x = 26,$$
$$y\,z + 40\,x = 298.$$

Ответ: у трехглавого змея 14 ног.

Пример 4. На 50 рублей куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты таковы: 5 руб.; яблоки, штука – 1 руб.; сливы, штука – 10 коп. Сколько фруктов каждого рода было куплено?

Решение. Обозначив число арбузов за x, яблок через y и слив через z, составляем два уравнения:

$$\begin{cases} 500x + 100y + 10z = 5000, \\ \quad x + y + z = 100 \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения, деленного на 10, второе, получим одно уравнение с двумя неизвестными:

$$49x + 9y = 400.$$

Дальнейший ход решения таков:

$$y = \frac{400-49x}{9} = 44 - 5\,x + \frac{4(1-x)}{9} = 44 - 5\,x + 4\,t,$$

$$t = \frac{1-x}{9},\ x = 1 - 9\,t.$$

$$y = 44 - 5(1 - 9\,t) + 4\,t = 39 + 49\,t.$$

Из неравенств $1 - 9\,t > 0$ и $39 + 49t > 0$ устанавливаем, что $-\frac{39}{40} < t < \frac{1}{9}$ и, следовательно, $t = 0$. Поэтому $x = 1$, $y = 39$. Подставив эти значения x и y во второе уравнение, получаем: $z = 60$. Итак, куплены были 1 арбуз, 39 яблок, 60 слив.

Ответ: 1 арбуз, 39 яблок, 60 слив.

Домашнее задание

1. Решите уравнение $3\,x + 5\,y = 7$ в целых числах.

2. Найдите все целые решения уравнения $3\,x - 12\,y = 7$.

3. Фишка стоит на одном из полей бесконечной в обе стороны клетчатой полоски бумаги. Она может сдвигаться на m полей вправо или на n полей влево. При каких m и n она сможет переместиться в соседнюю справа клетку? За какое наименьшее число ходов она сможет это сделать?

4. В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них 18 ног. Узнать сколько в клетке тех и других. Укажите все решения.

5. Решите в натуральных числах уравнение $5\,x + 8\,y = 39$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько было контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят 3 тонны? Указать все решения.

2. У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них 39 ног?

3. Решите в целых числах уравнение $5\,x - 7\,y = 3$.

4. Решите в целых числах уравнение $3\,x - 4\,y = 1$.

3. Задачи на сложные проценты

Задачи «на проценты», пожалуй, единственный «подарок» математикам от бухгалтеров. Поэтому для успешного решения таких задач нужно помнить некоторые простые ***правила***:

1) Чтобы найти часть от числа, нужно эту часть (дробь) умножить на число.
2) Вся величина, от которой берутся проценты, составляет 100%.
3) Чтобы избавиться от процентов, нужно перевести их в части, разделив на 100. Например, 20% = 0,2; 75% = 0,75; 150% = 1,5 и т.д.
4) Чтобы узнать, на сколько процентов изменилась какая-то величина, нужно из конечного значения вычесть начальное и результат разделить на начальное значение. То, что получится, нужно умножить на 100%.
5) Чтобы узнать процентное содержание вещества в растворе, нужно массу вещества разделить на массу раствора и результат умножить на 100%.

Пример 1. За весну Обломов похудел на 25%, за тем за лето прибавил в весе 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел или поправился Обломов за год?

Решение. Если принять за x начальный вес Обломова, то к концу весны Обломов весил $0{,}75\,x$, к концу лета – $1{,}2 \cdot 0{,}75\,x$, к концу осени – $0{,}9 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}75\,x$, а к концу года – $1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}75\,x = 0{,}972\,x < x$.

Ответ: Похудел.

Пример 2. Вкладчик открыл в банке счет и положил на него $S_0 = 150000$ рублей сроком на 4 года под простые проценты по ставке 18% в год. Какой будет сумма S_4, которую вкладчик получит при закрытии вклада? На сколько рублей вырастет вклад за 4 года? Чему равен коэффициент наращивания?

Решение. В нашем случае S_0 = 150 000, p = 18, n = 4. По формуле $S_n = S_0 \cdot (1 + n\,p / 100$ рублей имеем S_4 = 150 000 (1 + 18· 4/ 100) = 258 000 рублей.

За 4 года вклад увеличился на 108 000 рублей = 258 000 рублей – 150 000 рублей. Коэффициент наращивания по формуле $S_n / S_0 = 1 + n\,p / 100$ равен S_4 / S_0 = 1,72. Он показывает, что за 4 года первоначальный вклад S_0 увеличился в 1,72 раза.

Пример 3. Какую годовую ставку простых процентов выплачивает банк, если вклад 12 000 рублей через 3 года достиг величины 14 160 рублей? Определите коэффициент наращивания.

Решение. По условию, S_0 = 12 000, S_3= 14 160, n = 3. Из соотношения $S_n = S_n \cdot (1 + n\,p / 1\,000)$ рублей имеем $p = (S_3 / S_0 - 1) *1\,000 / n$. Подставляем в полученное выражение заданные значения, вычисляем результат: p = 5,(9), т.е. p = 6%. Коэффициент наращивания равен S_3 / S_0 = 1,18.

Пример 4. Сберкасса выплачивает 3% годовых. Во сколько раз увеличится величина вклада через 2 года?

Решение. Пусть величина вклада составляет S_0 руб. Тогда через 2 года эта величина станет равной $S_2 = S_0\,(1+ p / 100)^2 = (1{,}03)^2\,S_0 = 1{,}0609\,S_0$.

Ответ. В 1,0609 раза.

Пример 5. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%. На следующий год она увеличилась на 8%. Определить средний ежегодный прирост продукции за этот период.

Решение. Обозначим средний ежегодный прирост продукции через q%. Тогда

$$(1 + 4 / 100)\,(1 + 8 / 100) = (1 + q / 100)^2.$$

Отсюда находим $q = \sqrt{(104 \times 108)} - 100 \approx 5{,}98$.

Пример 6. Выработка продукции за первый год работы предприятия возросла на p%, а за следующий год по сравнению с первоначальной она возросла на 10% больше, чем за первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%?

Решение. За первый год выработка возросла в (1 + p / 100) раз по сравнению с первоначальной, за второй год – в (1 + (p + 10) / 100) раз по сравнению с началом второго года и в (1 + p / 100)(1 + (p + 10) / 100) по сравнению с первоначальной и составила 1,4859:

$$(1 + p / 100)(1 + (p + 10) / 100) = 1{,}4859.$$

Отсюда p = 17%.

Пример 7. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Решение. Пусть x – процент прироста продукции. Тогда после первого увеличения

Выпуск возрастет в (1 + x) раз, после второго – во столько же. То есть

$$600\,(1 + x)\,(1 + x) = 726$$

Отсюда x = 10%.

Пример 8. В оленеводческом совхозе стадо увеличивается в результате естественного прироста и приобретения новых оленей. В начале первого года стадо составляло 3000 голов, в конце года совхоз купил 700 голов. В конце второго года стадо составляло 4400 голов. Определить процент естественного прироста.

Решение. Пусть x – процент естественного прироста. Тогда в конце 1-го года в стаде станет 3000 $(1 + x / 100) + 700$ оленей. За второй год число оленей увеличится в $(1 + x / 100)$ раз по сравнению с началом года и станет 4400.

$(3000 (1 + x / 100) + 700) (1 + x / 100) = 4400$.

Отсюда $x = 10\%$.

Домашнее задание

1. Банк выдал ссуду на ссуду 10 000 р. клиенту A на срок 2 месяца, затем деньги, полученные от клиента A, клиенту B на срок 3 месяца, деньги, полученные от клиента B, выдал клиенту C на 5 месяцев и, наконец, полученные от клиента C – клиенту D на 2 месяца. Все ссуды были даны под 45% годовых. Какую сумму вернет банку клиент D (с точностью до 1 р.) и под какую реальную процентную ставку банк осуществлял свои операции?

2. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накоплена сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

3. Предприниматель внес в Стройбанк некоторую сумму под определенный процент годовых. Через год 2/5 накопленной суммы он пожертвовал на развитие школы. Банк увеличил процент годовых на 15%, и еще через год накопленная сумма превысила первоначальный вклад на 13,1%. Каков новый процент годовых?

4. Фермер взял кредит в банке под определенный процент. На следующий год банк повысил процент кредита втрое, поэтому фермер вернул 2/3 всей задолженности за первый год. Через два года долг фермера составил 64% от первоначальной взятой суммы. Сколько процентов банк берет за кредит на второй год?

5. Коммерсант перечислил некоторую сумму в банк под определенный процент годовых. Через год он снял 1/3 от накопленной суммы за год. Процент годовых банка на следующий год был увеличен вдвое, поэтому еще через год накопленная сумма увеличилась на 68% от первоначального вклада. Чему равен первоначальный процент годовых?

Задачи для самостоятельного решения

1. Вкладчик внес некоторую сумму в сбербанк под определенный процент годовых. Через год он взял половину получившейся суммы и переложил ее в коммерческий банк, процент годовых которого в 32 раза выше, чем в сбербанке. Еще через год сумма вкладчика в коммерческом банке превысила первоначальную сумму на 4%. Каков процент годовых в сбербанке?

2. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк ¾ от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

3. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

4. Вкладчику через его сбережения через год банк начислил 6000 рублей процентных денег. Добавив 44 000 рублей, вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь было произведено начисление процентов, и теперь вклад вместе с процентами составил 257,% тысяч рублей. Какая сумма положена в банк первоначально и сколько % начисляет банк?

5. Две суммы денег, всего 500 000 руб. положены в банк под 3% годовых. Каждая из них дала 6000 руб. дохода, причем первая сумма находилась в банке на 4 месяца дольше, чем вторая. Как велика каждая сумма и на какой срок она положена, если ни одна из них не находилась в банке более одного года?

4. Логические задачи

4.1. Решение логических задач составлением таблиц

Пример 1. Три друга: Арбузов, Виноградов и Огурцов встретились на рынке, куда пришли за покупками. Купивший арбуз сказал Виноградову: «Любопытно, что один из нас купил арбуз, другой – виноград, а третий огурцы, но ни у кого покупка не соответствует фамилии». Что купил каждый из беседующих?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей. По условию задачи Арбузов не покупал арбуз, Виноградов не покупал виноград, а Огурцов купил не огурцы. Это позволяет поставить знак «–» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию Виноградов не покупал арбуз, и, значит, в клетке на пересечении строки «Виноградов» и столбца «арбуз» также нужно поставить знак «–».

Фамилия \ покупка	арбуз	виноград	огурцы
Арбузов	–		
Виноградов	–	–	
Огурцов			–

Из таблицы следует, что только Огурцов мог купить арбуз, а Виноградов – только огурцы. Поставим знак плюс в соответствующих клетках. Очевидно, что Арбузов купил виноград.

Фамилия \ покупка	арбуз	виноград	огурцы
Арбузов	–	+	–
Виноградов	–	–	+
Огурцов	+	–	–

Использование таблицы помогло наглядно оформить решение задачи.

Ответ: Огурцов купил арбуз, Виноградов - огурцы, а Арбузов купил виноград.

Пример 2. Три матрешки – одеты в синий, красный и зеленый сарафаны и платки этих же цветов. Известно, что только у Маши цвет сарафана и платка совпадают. Ни сарафан, ни платок Глаши не синие. Фрося была в зеленом сарафане. Определите цвет сарафана и платка у каждой из матрешек.

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей

Имя	Цвет сарафана			Цвет платка		
	синий	красный	зеленый	синий	красный	зеленый
Маша	+	–	–	+	–	–
Глаша	–	+	–	–	–	+
Фрося	–	–	+	–	+	–

Так как Фрося была в зеленом сарафане, то обозначим это знаком «+» в таблице и отметим, что сарафан у неё не может быть красным и синим, а платок не может быть зеленый (соответственно знак «–»). У Маши и Глаши в столбце «цвет сарафана зеленый» ставим знак «–». Так как ни сарафан, ни платок Глаши не были синие, то в соответствующих клетках ставим знак «–». Теперь видно, что у Глаши сарафан красный, а у Маши синий. Так мы установили цвета сарафанов матрешек. При этом, учитывая условие задачи, мы делаем вывод, что у Маши платок синий, у Фроси не зеленый и не синий, значит – красный. Следовательно, у Глаши платок зеленый.

Ответ: Маша была в платке и сарафане синего цвета, Глаша в красном сарафане и зеленом платке, а Фрося в зеленом сарафане и красном платке.

Пример 3. В симфонический оркестр приняли на работу трѐх музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что: 1.Смит самый высокий; 2.играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте; 3.играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу; 4.когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их; 5.Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое. На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Решение. Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Так как музыкантов трое, инструментов шесть и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют. Из условия 4 следует, что Смит не играет ни на альте, ни на трубе, а из условий 3 и 5, что Браун не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Брауна – альт и кларнет. Занесем это в таблицу, а оставшиеся клетки столбцов "альт" и "кларнет" заполним нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит			0	0		
Вессон			0	0		

Из таблицы видно, что на трубе может играть только Вессон.

Из условий 1 и 2 следует, что Смит не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Браун, ни Смит, то скрипачом является Вессон. Оба инструмента, на которых играет Вессон, теперь определены, поэтому остальные клетки строки "Вессон" можно заполнить нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0		0	0		0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Из таблицы видно, что на флейте и на гобое может играть только Смит.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0	1	0	0	1	0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Ответ: Браун играет на альте и кларнете, Смит – на флейте и гобое, Вессон – на скрипке и трубе.

Пример 4. Три одноклассника – Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой физиком, а третий юристом. Один полюбил туризм, другой бег, страсть третьего – регби. Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра – единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги. Забавно, но у двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен. Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

Решение. Здесь исходные данные разбиваются на тройки (имя – профессия – увлечение). Из слов Юры ясно, что он не увлекается туризмом и он не врач. Из слов врача следует, что он турист.

Имя	Юра		

Профессия		врач	
Увлечение		турист	

Буква "а", присутствующая в слове "врач", указывает на то, что Влад тоже не врач, следовательно врач – Тимур. В его имени есть буквы "т" и "р", встречающиеся в слове "туризм", следовательно второй из друзей, в названиях профессии и увлечения которого не встречается ни одна буква его имени – Юра. Юра не юрист и не регбист, так как в его имени содержатся буквы "ю" и "р". Следовательно, окончательно имеем:

Имя	Юра	Тимур	Влад
Профессия	физик	врач	юрист
Увлечение	бегун	турист	регби

Ответ. Влад – юрист и регбист, Тимур – врач и турист, Юра – физик и бегун.

Пример 5. Три дочери писательницы Дорис Кей – Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств – пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго. Известно, что: 1. Джуди живет не в Париже, а Линда – не в Риме; 2. парижанка не снимается в кино; 3. та, кто живет в Риме, певица; 4. Линда равнодушна к балету. Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Решение. Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

Париж	Рим	Чикаго		пение	балет	кино
0			Джуди			
			Айрис			
	0		Линда		0	

Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку, соответствующую строке "Линда" и столбцу "Пение", ставим 0.

Париж	Рим	Чикаго		пение	балет	кино
0			Джуди			
			Айрис			
	0		Линда	0	0	

Из таблицы видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

Париж	Рим	Чикаго		пение	балет	кино
0			Джуди			0
			Айрис			0
	0		Линда	0	0	1

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина. В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

Париж	Рим	Чикаго		пение	балет	кино
0	1	0	Джуди	1	0	0

1	0	0	Айрис	0	1	0
0	0	1	Линда	0	0	1

Ответ. Айрис балерина. Она живет в Париже.

Домашнее задание

1. Три девочки – Роза, Маргарита и Анюта представили на конкурс цветоводов корзины выращенных ими роз, маргариток и анютиных глазок. Девочка, вырастившая маргаритки, обратила внимание Розы на то, что ни у одной из девочек имя не совпадает с названием любимых цветов.
Какие цветы вырастила каждая из девочек?

2. Пятеро одноклассников: Ирена, Тимур, Камилла, Эльдар и Залим стали победителями олимпиад школьников по физике, математике, информатике, литературе и географии.
Известно, что:
– Победитель олимпиады по информатике учит Ирену и Тимура работе на компьютере;
– Камилла и Эльдар тоже заинтересовались информатикой;
– Тимур всегда побаивался физики;
– Камилла, Тимур и победитель олимпиады по литературе занимаются плаванием;
– Тимур и Камилла поздравили победителя олимпиады по математике;
– Ирена сожалеет о том, что у нее остается мало времени на литературу.
Победителем какой олимпиады стал каждый из этих ребят?

3. Серафима, Софья, Назар, Прокофий и Никита – родственники. Кем, вероятнее всего, Никита может приходится Серафиме, если известно, что:
– Серафима – сестра Софьи;
– Назар – сын Прокофия;
– Софья – тетя Назара;
– Прокофий – дядя Никиты.

4. Даша, Лиля, Лариса, Сережа и Вера надували для праздника разноцветные шары. У троих ребят получились синие круглые шары, у двоих – зеленые продолговатые. Кто из ребят надувал синие шары, если известно, что:
– Сережа и Лариса надували шары разного цвета;
– У Даши и Лили получились шары разной формы;
– У Лили и Ларисы выходили шары разной формы;
– Вера и Сережа старались надуть шары одного цвета.

5. Три подруги Белова, Желтова и Краснова пришли в школу. На одной из них было жёлтое платье, на другой – красное, на третьей – белое. Девочка в белом платье говорит Желтовой: «Нам надо поменяться платьями, а то у всех троих цвет платьев не соответствует фамилиям». Кто в какое платье был одет?

Задачи для самостоятельного решения

1. Друзья Алёша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой из школы на автобусе, другой – на трамвае, третий – на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проезжал троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чём ездит?

2. Четыре футбольных команды: итальянская команда «Милан», испанская – «Реал», российская – «Зенит», английская – «Челси» встретились в групповом этапе лиги чемпионов по футболу. Их тренировали тренеры из этих же четырех стран: итальянец Антонио, испанец Родриго, русский Николай, англичанин Джон. Известно, что национальность у всех четырех тренеров не совпадала с национальностью команд. Требуется определить тренера каждой команды, если известно:
а) Зенит не тренируется у Джона и Антонио;
б) Милан обещал никогда не брать Джона главным тренером.

3. На новогодний праздник три друга – Евгений, Николай, Алексей, выбрали себе костюмы трех богатырей: Ильи Муромца, Алеши Попович, Добрыни Никитича. Известно, что:

·– Евгений – самый высокий.

·– Выбравший костюм Добрыни Никитича меньше ростом, чем выбравший костюм Ильи Муромца.

·– Алексею не подошел костюм Добрыни Никитича.

·– Ни у одного из друзей имена не совпадает с именем богатырей, выбранных костюмов.

Какой костюм выбрал каждый из друзей?

4. В небольшом городке жили пять друзей Иванов, Петров, Серов, Зуев и Асеев. Профессии у них: маляр, мельник, плотник, актер, парикмахер. Петров и Зуев никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Зуев собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ. Петров и Иванов живут в одном доме с актером. Иванов и Серов каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Петров брал билеты на футбол для себя и для мельника. Кто кем был?

4.2. Решение логических задач с помощью схем

Пример 1. Аня и Таня имеют фамилии Строгова и Добрынина. Какую фамилию имеет каждая из девочек, если известно, что Таня и Добрынина – одноклассницы?

Решение. Запишем условие:

1. Даны имена девочек: Аня и Таня. Обозначим их символьными переменными А и Т соответственно и запишем в графу «Дано».
2. Даны фамилии девочек: Строгова и Добрынина. Обозначим их символьными переменными С и Д соответственно и запишем в графу «Дано: ».
3. В графе «Рассуждения» запишем в первый столбик символьные переменные, соответствующие именам, а во второй – символьные переменные, соответствующие фамилиям.
4. В задаче требуется узнать, какую фамилию имеет каждая девочка; запишем этот вопрос в графу «Надо».

Дано:	**Рассуждения:**
Аня (А)	А Д
Таня (Т)	
Добрынина (Д)	Т С
Строгова (С)	
Надо:	
Кто какую фамилию имеет?	

Анализируем условие задачи и строим рассуждения, отмечая выводы на схеме:

1. Таня не Добрынина (по условию). (Покажем на схеме пунктирной линией отсутствие соответствия между переменными Т и Д.) Значит, Таня – Строгова (по доказательству). (Покажем на схеме сплошной линией соответствие между переменными Т и С.)
2. Так как Таня – Строгова (по доказательству), значит, Аня не Строгова. (Покажем на схеме пунктирной линией отсутствие соответствия между символьными переменными А и С.)
3. Так как Аня – не Строгова (по доказательству), значит, Аня – Добрынина. (Покажем сплошной линией соответствие между символьными переменными А и Д.)
4. Итак, рассуждая, приходим к выводу: Таня имеет фамилию Строгова, а Аня – Добрынина.

Записываем решение в тетради:

Дано:	**Рассуждения:**
Аня (А)	А Д
Таня (Т)	
Добрынина (Д)	Т С
Строгова (С)	1. Так как Таня не Добрынина (по условию), значит, Таня – Строгова.
Надо:	2. Так как Таня – Строгова (по доказательству), значит, Аня не

Кто какую фамилию имеет?

Строгова.
3. Так как Аня не Строгова (по доказательству), значит, Аня – Добрынина.

Ответ: Таня – Строгова, а Аня – Добрынина.

Пример 2. Света и Наташа имеют фамилии Иванова и Петрова. Какую фамилию имеет каждая девочка, если Света и Иванова живут в соседних домах?

Дано:
Света (С)
Наташа (Н)
Иванова (И)
Петрова (П)

Надо:
Кто какую фамилию имеет?

Рассуждения:

С И

Н П

1. Так как Света не Иванова (по условию), значит, Света – Петрова.
2. Так как Света – Петрова (по доказательству), значит, Наташа не Петрова.
3. Так как Наташа не Петрова (по доказательству), значит Наташа Иванова.

Ответ: Света имеет фамилию Петрова, а Наташа – Иванова.

Пример 3. Серёжа и Костя имеют фамилии Белов и Чернов. Какую фамилию имеет каждый из ребят, если Серёжа на два года старше Белова?

Дано:
Серёжа (С)
Костя (К)
Белов (Б)
Чернов (Ч)

Надо:
Кто какую фамилию имеет?

Рассуждения:

С Б

К Ч

1. Так как Серёжа не Белов (по условию), значит, Серёжа – Чернов.
2. Так как Серёжа – Чернов, (по доказательству), значит, Костя не Чернов.
3. Так как Костя не Чернов, (по доказательству), значит Костя Белов.

Ответ: Серёжа имеет фамилию Чернов, а Костя Белов.

Домашнее задание

1. Галя, Юля и Оля пришли на праздничный утренник в платьях разных цветов – жёлтом, синем и розовом. Галя была не в жёлтом, Юля – не в жёлтом и не в розовом. В платье какого цвета была каждая из девочек?

2. В квартирах №№ 1, 2, 3 живут три котёнка – белый, чёрный, рыжий. В квартирах №№ 1 и 2 живут не чёрные котята. Белый котёнок живёт не в квартире № 1. В какой квартире какой котёнок живёт?

3. Жили-были три поросёнка – Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Решили они построить на зиму домики: один – из соломы, другой – из веток, третий – из камня. Кто какой домик построил, если известно, что Ниф-Ниф построил домик не из веток и не из камня, Наф-Наф построил домик не из веток?

4. Сидели как-то на берегу реки три школьных товарища и вели неторопливую беседу. Фамилия одного из этих ребят – Токарев, второго – Слесарев, а третьего – Плотников. Отец одного из школьников работает плотником, второго – токарем, третьего – слесарем.

– Интересно, сказал мальчик, отец которого был слесарем, – что ни один из наших отцов не работает по той специальности, от которой произошла его фамилия.

– А ты ведь прав, – подтвердил после раздумий Плотников.

Кем работают отцы ребят?

Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре брата – Юра, Петя, Володя и Коля – учатся в первом, во втором, в третьем и в пятом классах. Историю начинают изучать с пятого класса. Петя учится только на «4» и «5», а младшие братья стараются брать с него пример. Володя уже изучает историю. Юра помогает решать задачи младшему брату. Кто из них в каком классе учится?

2. Эдик, Вася, Андрей и Миша заняли первые четыре места в соревнованиях. На вопрос, какие они заняли места, мальчики ответили честно:
– Эдик не занял ни первое и ни третье место;
– Вася занял второе место;
– Андрей не проиграл Мише.
Какие места заняли мальчики?
3. Гонщики приехали на авторалли на своих машинах. У Игоря машина красная, у Пети – не черная, не синяя, не голубая, у Миши есть черная и синяя машины, у Алексея есть машины всех перечисленных цветов, у Бори есть машины белого и синего цветов. У кого какого цвета машина, если все юноши были на машинах разного цвета?
4. Юра, Коля, Саша и Дима делали модели. Двое делали модели из дерева, а двое – из картона. Коля и Дима делали модели из разного материала. Юра делал модель не из картона. Дима делал модель из картона. Получились три модели самолетов и одна модель корабля. Коля не делал модель самолета. Какую модель и из какого материала делал каждый из мальчиков?

4.3. Задачи с конечными множествами

Пример 1. Капроновый шнур длиной 30 см разрезали на 3 части. Причем одна из них на 1 см больше другой и на 1 см меньше третьей. Найди длину каждой части.
Решение. Если капроновый шнур разрезать на 3 одинаковые части, то каждая часть будет равна 30 : 3 = 10см. Но одна из частей больше другой на 1 см. Если одна часть равна 10 см, то другая 10 + 1 = 11 см, а третья 10 – 1 = 9 см.

Ответ: 10 см; 9 см; 11 см.

Пример 2. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и веры делится на три?
Решение. Найдем сначала возраст Бори. Так как в детский сад ходит девочка, то это не Боря. Тогда Боре больше 5 лет.
Так как Аня старше Бори, то Боре не может быть 15 лет. А так как сумма лет Ани и Веры делится на три, то, учитывая возраст детей в семье, это может быть в следующих случаях:
1) одной девочке 5 лет, а другой 13 лет; 2) одной девочке 8 лет, а другой 13 лет.
В обоих случаях одной девочке 13 лет. Следовательно, Боре не 13 лет. Имеем: Боре не 5, не 15 и не 13 лет. Тогда **Боре 8 лет.**
Установим теперь возраст каждой девочки. Так как сумма лет Ани и Веры кратна трем, а Боре 8 лет, то возможен лишь один случай: девочкам 5 и 13 лет. А так как по условию Аня старше Бори, то **Ане 13 лет.** Тогда – **Вере 5 лет,** а **Гале 15 лет.**

Ответ: Гале 15 лет, Ане 13 лет, Боре 8 лет, а Вере 5 лет.

Пример 3. Пять богатырей Земель Русских: Алеша Попович, Илья Муромец, Добрыня Никитич, Святогор Великий, Никита Кожемяка решили вызвать на поединок Змея Горыныча. Чтобы установить очередность участия в поединке, богатыри бросили жребий. Оказалось, что Алеша будет биться раньше Ильи, но позже Никиты. Добрыня и Никита не будут биться один за другим. Святогор в очереди на битву не стоит рядом ни с Никитой, ни с Алешей, ни с Добрыней. В каком порядке богатыри договорились биться со Змеем Горынычем?
Решение. По условию задачи: в очереди на битву три богатыря стоят в следующем порядке: Никита, Алеша, Илья. Поэтому необходимо установить места Добрыни и Святогора в очереди. Но по условию задачи Святогор не находится рядом ни с Никитой, ни с Алешей, ни с Добрыней. Это возможно лишь в случае, когда Святогор стоит за Ильей, а остальные богатыри стоят перед Ильей. Теперь нужно установить место Добрыни среди четырех богатырей, стоящих в порядке: Никита, Алеша, Илья, Святогор. Так как по условию Добрыня не может стоять ни перед Никитой, ни после него, ни перед

Святогором, ни после него, то единственным местом, где может стоять Добрыня, является место между Алешей и Ильей. Таким образом, богатыри стоят в очереди в следующем порядке: Никита, Алеша, Добрыня, Илья, Святогор.

Ответ: Никита, Алеша, Добрыня, Илья, Святогор.

Пример 4. В Цветочном Городе, став в кружок, беседуют четверо коротышек: Шпунтик, Винтик, Незнайка и Торопыжка. Так как дело было перед балом, то все были одеты в красивые фраки.
Коротышка в зеленом фраке (не Шпунтик и не Винтик) стоит между коротышкой в голубом фраке и Торопыжкой. Коротышка в белом фраке стоит между коротышкой в черном фраке и Винтиком. Какого цвета фрак у каждого из коротышек?
Решение. Будем обозначать места расположения коротышек в кружке овалами, занумеровав их по часовой стрелке.

Предположим, что в овале 1 стоит коротышка в зеленом фраке. По условию задачи это не Шпунтик, не Винтик и не Торопыжка. Значит, в зеленом фраке Незнайка.
Но по тому же условию задачи Незнайка стоит между коротышкой в голубом фраке и Торопыжкой. Не нарушая общности задачи, будем считать, что в овале 4 находится коротышка в голубом фраке, а в овале 2 стоит Торопыжка.
Предположим, что в овале 2 коротышка в белом фраке (это Торопыжка), но тогда в овале 1 должен стоять либо Винтик, либо коротышка в черном фраке, что противоречит доказанному выше. Значит, коротышка в белом фраке стоит в овале 3. При этом коротышка в голубом фраке должен быть Винтик, а Торопыжка должен быть в черном фраке. Теперь ясно, что Шпунтик в белом фраке.
Ответ: Шпунтик белом фраке, Винтик в голубом, Незнайка в зеленом фраке, а Торопыжка – в черном.

Пример 5. Дама сдавала в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Известно, что чемодан весит больше, чем рюкзак, саквояж и рюкзак весят больше, чем чемодан и корзина, корзина и саквояж весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Перечислите вещи в порядке убывания веса.
Решение. Чемодан тяжелее рюкзака, так как саквояж и рюкзак весят больше, чем чемодан и корзина ($С + Р < Ч + К$), значит $С > Ч$, а так как $К + С = Ч + Р$, то $К < Р$.

Ответ. Вещи в порядке убывания: саквояж, чемодан, рюкзак, корзина.

Домашнее задание

1. Ребята кидали мяч. Володя кинул дальше Игоря, а Олег – ближе Игоря. Кто кинул мяч дальше – Володя или Олег?

2. Лягушка встречала гостей. Лиса пришла раньше медведя, волк – позже зайца, медведь – раньше зайца, сорока – позже волка. В каком порядке приходили гости?
3. В теремке Мышка живет выше Лягушки, но ниже Зайца, а Петух живет ниже Лягушки. Напиши, кто на каком этаже живет. В теремке Мышка живет выше Лягушки, но ниже Зайца, а Петух живет ниже Лягу
4. У мышиной норки очередь. Кузя ближе к норке, чем Рыжик, но дальше, чем кот Васька. Васька не стоит рядом с Борькой, а Мурка не стоит рядом ни с Васькой, ни с Кузей, ни с Рыжиком. На рисунке около каждой кошки напиши, как ее зовут.

Задачи для самостоятельного решения

1. Митя, Сережа, Юра, Толя и Костя пришли в музей до открытия и стали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, он стоял бы между Сережей и Костей, а если бы Митя встал в конце очереди, то рядом с ним стоял бы Юра. Но Митя встал впереди своих товарищей. Кто за кем стоит, если известно, что Костя стоит за Сережей?
2. Пять товарищей спускались с горки на санках. Игорь проехал дальше Романа, но ближе чем Олег. Костя проехал меньше, чем Роман, а Илья – дальше Олега. Кто из ребят проехал дальше всех, а кто – меньше всех?
3. На вечеринку собрались четверо друзей: Аня, Вика, Миша и Коля. Коля пришел раньше Ани, но не был первым. Определите, в какой последовательности друзья приходили к месту встречи, если Вика пришла последней.

4.4. Задачи о лгунах

Пример 1. Петя, Вася, Коля и Миша играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. На вопрос: «Кто это сделал?» Петя, Вася и Коля ответили: «Не я!», а Миша – «Не знаю». Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а двое – неправду. Знает ли Миша, кто разбил стекло? Ответ нужно объяснить.
Решение. Начнем с ответов Пети, Васи и Коли. Так как стекло разбил кто – то один, то среди ответов Пети, Васи и Коли Может быть лишь один ложный, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое. Тогда вторым ложным ответом будет отвеет Миши, так как всего ложных ответов два. Поэтому Миша знал, кто разбил стекло.

Пример 2. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит увиденный ими туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген». Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?
Решение. Так как ответ встреченного островитянина мог быть лишь «Я – абориген» (только этот ответ является правдой для аборигенов и ложью для пришельцев), а проводник сказал, что туземец – абориген, то **проводник является аборигеном** (он сказал правду!).

Домашнее задание

1. Вадим, Сергей и Михаил хотят в будущем стать агрономом, трактористом и экономистом. На вопрос, кем хотел бы стать каждый из них, один ответил: «Вадим хочет быть агрономом, Сергей не хочет быть агрономом, а Михаил не хочет быть экономистом». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Кем хочет стать каждый из мальчиков?

2. Три брата имеют специальности: архитектор, бетонщик, водитель. Из трех утверждений: «Алексей – архитектор», «Борис – не архитектор», «Владимир – не водитель» только одно верное. Является ли Владимир архитектором?

3. Петя, Катя и Саша пошли на бал-маскарад. Во время раздачи призов королева бала попросила каждого из них сказать, мальчик он или девочка. В ответ дважды прозвучало: «Я – мальчик» и один раз: «Я – девочка». Потом оказалось, что два из этих ответов верны, а один — нет. Назовите полное имя Саши.

4. Учитель проверил работы трех учеников: Алексеева, Васильева, Сергеева, но не захватил их с собой. Ученикам он сказал: «Вы все получили разные оценки: «3», «4» и «5». У Сергеева не «5», У Васильева не «4», а вот у Алексеева, по-моему, «4». Впоследствии оказалось, что учитель верно высказался об оценке только одного ученика. Какая оценка у каждого ученика?

5. В некотором царстве-государстве повадился Змей Горыныч разбойничать. Послал царь четырех богатырей погубить Змея, а награду за то обещал великую. Вернулись богатыри с победой, и спрашивает их царь: «Так кто же из вас главный победитель, кому достанется царева дочь и полцарства?» Засмущались добры молодцы и ответы дали туманные.

1) Сказал Илья Муромец: «Это все Алеша Попович, царь-батюшка».

2) Алеша Попович возразил: «То был Микула Селянинович».

3) Микула Селянинович: «Не прав Алеша, не я это».

4) Добрыня Никитич: «И не я, батюшка».

Подвернулась тут Баба-Яга и говорит царю: «А прав-то лишь один из богатырей, видела я всю битву своими глазами».

Кто же из богатырей победил Змея Горыныча?

Задачи для самостоятельного решения

1. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Трое жителей острова – A, B и C – разговаривали между собой в саду. Проходивший мимо незнакомец спросил у A: «Вы рыцарь или лжец? » Тот ответил, но так неразборчиво, что незнакомец не смог ничего понять. Тогда незнакомец спросил у B: «Что сказал A?» «A сказал, что он лжец», – ответил B. «Не верьте B! Он лжет!» – вмешался в разговор островитянин C. Кто из островитян B и C рыцарь, а кто лжец?

2. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял жителя острова в проводники. Они пошли и увидели другого жителя острова. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал, что туземец говорит, что он абориген. Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

3. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, увидел трех стариков. «Ты кто, – спросил он первого, – абориген или пришелец?» Старик ответил на вопрос путешественника, но тот не расслышал ответа. «Первый старик сказал, кажется, что он пришелец», – обратился путешественник к двум другим старикам. «Да, – сказал второй, он сказал, что он пришелец». «Нет, возразил третий, – он сказал, что он не пришелец, а абориген». Что сказал первый старик? Кем были второй и третий старики?

4. Жители города А говорят только правду, жители города Б – только ложь, жители города В – попеременно правду и ложь (т. е. из двух утверждений, высказанных ими, одно истинно, а другое ложно). Дежурному пожарной части по телефону сообщили: «У нас пожар, приезжайте скорее!» «Где?» – спросил дежурный. «В городе В», – ответили ему. Куда должна выехать пожарная машина? (Пожар действительно был.)

5. В одной книге было написано 100 следующих утверждений:
«В этой книге ровно одно неверное утверждение». «В этой книге ровно два неверных утверждения».
«В этой книге ровно сто неверных утверждений».
Какое из этих утверждений верное?

6. Коля, Вася и Сережа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину чашку. На вопрос, кто разбил чашку, они дали такие ответы:

Сережа: 1) «Я не разбивал»; 2) «Вася не разбивал». Вася: 3) «Сережа не разбивал»; 4) «Чашку разбил Коля». Коля: 5) «Я не разбивал»; 6) «Чашку разбил Сережа».

Бабушка знала, что один из ее внуков, назовем его правдивым, оба раза сказал правду; второй, назовем его шутником, оба раза сказал неправду; третий, назовем его хитрецом, один раз сказал правду, а другой раз – неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца. Кто из внуков разбил чашку?

7. Алеша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения.

1) Алеша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке».
2) Боря: «Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке».
3) Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

8. Виктор, Роман, Леонид и Сергей заняли на олимпиаде по информатике четыре первых места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1) Сергей – первый, Роман – второй;
2) Сергей – второй, Виктор – третий;
3) Леонид – второй, Виктор – четвертый.

Известно, что в каждом ответе только одно утверждение истинно. Как распределились места?

5. Олимпиадные задачи по арифметике

Пример 1. Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найти его.
Решение. $3025 = 55^2$.

Пример 2. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить одно двузначное и одно трехзначное число так, чтобы второе делилось на первое? Каждая цифра должна быть использована ровно один раз.
Решение. Можно. 532 делится на 14, а 215 делится на 43.

Пример 3. Из чисел A, B и C одно положительно, одно отрицательно и одно равно 0. Известно, что $A = B (B – C)$. Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно 0? Почему?
Решение. Если $A = 0$, то либо $B = 0$, либо $B – C = 0$. Ни то, ни другое невозможно. Поэтому A не 0. Если $B = 0$, то и $A = 0$. Это тоже невозможно. Поэтому B не 0. Следовательно, $C = 0$, и равенство из условия задачи можно переписать в виде $A = B$. Отсюда следует, что $B > 0$. Значит, B положительно, а A – отрицательно.

Пример 4. Коля, Ваня и Петя собирали грибы. Коля нашел 10 сыроежек и столько белых, сколько подберезовиков нашел Ваня. Ваня нашел лисичек в два раза меньше, чем сыроежек Коля, и 3 подберезовика. Петя нашел только лисички, которых у него было больше, чем белых у Коли, но меньше, чем лисичек у Вани. Сколько грибов собрали ребята?
Решение: Коля нашел 10 сыроежек + 3 белых; Ваня – 5 лисичек и 3 подберезовика, Петя – 4 лисички (меньше 5 и больше 3). Всего грибов 13 + 8 + 4 = 25.
Ответ: 25 грибов.

Пример 5. Найти наименьшее число, которое начинается с цифр 1998 и делится на все числа от 1 до 9.
Решение. Если число таково, то оно делится на 5 • 7 • 8 • 9 = 2520. Деля «уголком", получаем 1998360.
Ответ: 1998360.

Домашнее задание

1. Между цифрами 1, 2, 3, 4, 5 поставить знаки действий так, чтобы результат был равен 9.
2. Получить число 100, используя десять пятёрок, скобки и знаки арифметических действий.
3. Какой цифрой заканчивается произведение 7 х 27 х 47 х 67 х 87 х...х 1987 х 2007?
4. Найдутся ли два последовательных натуральных числа таких, что сумма цифр каждого из них делится на 11?
5. Докажите, что если цифры десятизначного числа выписать в обратном порядке, то полученное число не будет в три раза больше исходного.
6. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго – 85, без третьего – 80, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?

6. Решение текстовых (сюжетных) задач

Пример 1. Три седьмых класса собрали 700 кг макулатуры. 7-а собрал 130 кг, 7-б собрал в 2 раза больше, чем 7-а. Сколько килограммов макулатуры собрал 7-в класс?
Решение: Пусть 7-в собрал x кг макулатуры. Тогда:

$130 + 130*2 + x = 700,$
$130 + 260 + x = 700,$
$390 + x = 700,$
$x = 700 – 390,$
$x = 310.$

Ответ: ученики 7-в класса собрали 310 кг макулатуры.

Пример **2**. У Наташи было на 10 конфет меньше, чем у Маши. Каждая девочка дала Даше по 15 конфет. У Наташи осталось конфет в 2 раза меньше, чем у Маши. По сколько конфет было у девочек первоначально?
Решение: Пусть у Наташи было x конфет, тогда у Маши было $x + 10$ конфет. После того как они дали Даше по 15 конфет, у Наташи стало $x – 15$, а у Маши $x + 10 – 15 = x – 5$ конфет.
У Наташи стало в 2 раза меньше конфет, чем у Маши, поэтому
1) $2(x – 15) = x – 5$ $2x - 30 = x – 5$
$2x - x = 30 – 5$
$x = 25$ конфет было у Наташи.
2) 25 + 10 = 35 конфет было у Маши.
Ответ: 25 конфет было у Наташи, 35 конфет было у Маши первоначально.

Пример **3.** Расстояние между двумя причалами 35 км. Сколько времени потратит теплоход на путь по реке от одного причала до другого и обратно, если собственная скорость теплохода 17 км/ч, а скорость течения реки – 3 км/ч?
Решение: Собственная скорость теплохода 17 км/ч.

Скорость теплохода по течению реки 17 + 3 = 20 км/ч.
35 : 20=1,75 часа потратит теплоход на путь по течению реки
Скорость теплохода против течения реки 17 – 3 = 14 км/ч.
35 : 14 = 2,5 часа - потратит теплоход на путь против течения реки.
1,75 + 2,5 = 4,25 часа или 4 часа 15 мин. – потратит теплоход на путь туда и обратно.
Ответ: 4 часа 15 мин. – потратит теплоход на путь туда и обратно.

Домашнее задание

1. Площадь участка поля 80 га, первый тракторист вспахал 40% этого участка, а второй 60% оставшейся части. Кто из них вспахал больше и на сколько га?
2. Через 2 крана бак наполняется за 9 минут. Если бы бал открыт только первый кран, то бак наполнился бы за 36 минут. За сколько минут наполнился бы бак через один второй кран?
3. Тесто для вареников содержит 16 частей творога, 2 части муки, 1 часть масла, 3 части сметаны, 3 части сахара. Определите мессу каждого продукта в отдельности для приготовления 1 кг теста.
4. Торговец продает орехи двух сортов: одни по 90 центов, другие по 60 центов за килограмм. Он хочет получить 50 килограммов смеси по 72 цента за килограмм. Сколько для этого потребуется орехов каждого сорта?
5. Из двух сел вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились через 4 часа. Расстояние между селами 36км, скорость одного пешехода 4км/ч. Найти скорость второго пешехода.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из двух пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выходят два туриста. При встрече оказывается, что турист, вышедший из А, прошел на 2 км больше, чем второй турист. Продолжая движение с той же скоростью первый турист прибывает в В через 1 ч 36 мин., а второй в А – через 2 ч 30 мин после встречи. Найдите расстояние АВ и скорость каждого туриста.
2. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус, а через 20 мин вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автобус пришел в пункт В на 10 мин. позже легкового автомобиля. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.
3. Расстояние от станции А до станции В товарный поезд прошел за 9 часов, двигаясь со скоростью 40 км/ч. За какое время пройдет это расстояние почтовый поезд, если его скорость равна 60 км/ч? С какой скоростью должен двигаться пассажирский поезд, чтобы пройти это расстояние за 4 часа?
4. Плата за квартиру на 555 р. больше платы за телефон, а плата за электричество на 1300 р. меньше платы за квартиру. Что больше: плата за телефон или плата за электричество, и на сколько?
5. Сыну и дочери вместе 31 год. Отец старше сына на 28 лет, а мать старше дочери на 23 года. Сколько лет отцу и матери вместе?
6. Полярникам действующей станции сбросили с самолета два контейнера. В первом было 32 бочки с топливом, а во втором – 24 ящика с продуктами. Чему равен вес одного ящика, если каждая бочка весила 70 кг, а суммарный вес всего груза составил 3440 кг?

7. Принцип Дирихле и его применение при решении задач

Методическое замечание. Используемые рассуждения достаточно стандартны и основываются на применении свойств неравенств и методе доказательства «от противного». Рекомендуется при решении простых задач этого типа проводить рассуждения, не упоминая о принципе Дирихле, так как в школьной программе нет такой темы и при решении задач ссылки на этот принцип неоправданны.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ: *Если в n клеток посадить n+1 зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем 2 зайца*.

ОБОБЩЁННЫЙ ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ: *Если в n клеток посадить kn + 1 зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем n +1 заяц*.

Докажем обобщённый принцип Дирихле.

Доказательство от противного. Предположим, что не найдётся такой клетки. Значит, в каждой клетке находится не более чем k зайцев. Тогда всего в n клетках не будет более чем kn зайцев. Но, по условию, было $kn + 1$ зайцев. Получилось противоречие, значит, наше предположение неверно. Следовательно, найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем $k + 1$ заяц.

Методическое замечание. Безусловно, начинать эту тему стоит с задач, в которых нужно работать с конкретными числами. Обязательно в процессе решения нужно обращать внимание на то, что мы должны говорить «не более», «не менее», а не обсуждать «лучший» («худший») случай, так как доказать это часто бывает достаточно *сложно*.

Пример 1. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.
Решение. Всего в году 365 дней. Назовём дни ящиками, а учеников кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше 400/366 кроликов, т.е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Пример 2. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6 x 6 из чисел +1, -1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.
Решение. Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться от –6 до +6. Всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм. Противоречие, значит, составить такой квадрат невозможно.

Пример 3. На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.
Решение. Отразим океан симметрично относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу. Возьмём эту точку вместе с противоположной к ней.

Пример 4. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольных работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2,3,4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на контрольных?
Решение. Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 4^3 или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся отвечает один набор оценок.

Домашнее задание

1. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.
2. На земле больше 4 миллиардов человек, которые моложе 100 лет. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся в одну и ту же секунду.
3. На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше 15^o.
4. В ящике лежат носки: 10 чёрных, 10 синих, 10 белых. Какое наименьшее количество носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка а) одного цвета; б) разных цветов; в) чёрного цвета?
5. На карьере добыли 36 камней. Их веса соответственно 490 кг, 495 кг, 500 кг, …, 665 кг (арифметическая прогрессия). Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?

Задачи для самостоятельного решения

1. Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер?
2. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этих пяти человек. (Возможно, эти двое ни с кем не знакомы).

3. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.
4. Квадратная таблица ($2n$ + 1) x ($2n$ + 1) заполнена числами от 1 до $2n$ + 1 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце были представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение симметрично относительно главной диагонали, то на главной диагонали тоже представлены все эти числа.
5. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.
6. Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом заседании присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.
7. На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.
8. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ТЕСТИРОВАНИЯ ПО ПРЕДМЕТУ

Задача 1: В тесте было 20 вопросов. За каждый правильный ответ Вася получал 11 баллов. За каждый неправильный – минус 5. За пропуск ответа отнимается 1 балл. Вася набрал 80 баллов. Сколько пропусков при таком результате могло оказаться у Васи?

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

Задача 2: Сколько существует таких неупорядоченных пар (т.е. a и b то же самое, что b и a) натуральных чисел, что 1/a+1/b=1/8.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

Задача 3: Про 3 написанных числа известны 5 утверждений:

а) эти числа являются сторонами прямоугольного треугольника;

б) числа целые;

в) сумма этих чисел равна 0;

г) это три последовательных целых числа;

д) произведение этих чисел меньше 100.

Сколько одновременно верных утверждений может быть?

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

Задача 4: На доске написано число, начинающееся на 6. Если стереть первую цифру, то число уменьшится в k раз. Чему может быть равно k?

а) 7 б) 8 в) 9 г) 10 д) 15

Задача 5: Какие числа можно представить как сумму двух или более последовательных натуральных чисел?

а) 8 б) 10 в) 12 г) 14 д) 16

Задача 6: Вася забыл номер квартиры друга, но запомнил, что если взять номер этажа друга и между цифрами вставить номер подъезда, то получится номер квартиры. Номер квартиры заканчивается на 4 и на лестничной клетке он больше других номеров квартир. Сколько этажей может быть в этом доме, если этажей в доме не более, чем 30, а подъездов не более, чем 3, а на каждом этаже в каждом подъезде по 4 квартиры.

а) 14 б) 17 в) 20 г) 23 д) 26

Задача 7: Пятизначное число уменьшают на сумму своих цифр, полученное число опять уменьшают на сумму своих цифр и т.д. Какие числа можно получить в результате таких операций?

а) 18 б) 20 в) 12 г) 100 д) 27

Задача 8: Известно, что 2/3 класса были в театре, 3/5 были в кино, а 1/3 класса была и в театре и в кино. Петя, к сожалению, не был ни в кино, ни в театре. Сколько еще человек, кроме Пети, могло учиться в классе и ни разу не сходить ни в кино, ни в театр, если известно, что в классе от 17 до 35 человек?

а) 0 б) 1 в) 3 г) 5 д) 6

Задача 9: Из 9 единичных квадратов сложили большой квадрат 3×3. Какое число точек можно выбрать среди 16 вершин маленьких квадратов, чтобы никакие три точки не были бы вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника?

а) 6 б) 7 в) 8 г) 9 д) 10

Задача 10: Две стороны треугольника равны 4,57 см и 1,15 см. Чему может быть равна третья сторона, если известно, что она выражается целым числом сантиметров?

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6

Задача 11: В каждой клетке квадрата 5×5 расставлены единички и нолики таким образом, что в каждой строке, кроме, может быть, первой единичек больше, чем ноликов. А также в каждом столбце, кроме, может быть последнего, ноликов больше, чем единиц. Сколько ноликов может содержаться в квадрате?

а) 10 б) 11 в) 12 г) 13

д) расставить указанным образом единички и нолики нельзя.

Задача 12: Вася загадал двузначное число. Умножил его на 9, а затем зачеркнул последнюю цифру. Полученное число умножил на 13 и опять зачеркнул последнюю цифру. Мог ли Вася в результате получить числа?

а) 20 б) 13 в) 40 г) 55 д) 64

Задача 13: Какое количество острых углов могут образовать 5 лучей с общим началом?

а) 3 б) 4 в) 6 г)8 д) 9

Задача 14: Вася подбрасывал игральный кубик 5 раз и каждый раз записывал полученное число очков. Сумма записанных чисел равна 27. Сколько раз могла выпасть на кубике «пятерка»?

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4

Задача 15: В вершинах куба записаны числа 1 или -1. На каждой грани записали произведение чисел в ее вершинах. Чему может быть равна сумма всех чисел, записанных на гранях куба?

а) 6 б) -4 в) -2 г) 3 д) -6